Projekt *Zajedno kroz prirodoslovlje*

Linearna funkcija i vektori u eksperimentima

Priručnik za učenike

Izdavač

Gimnazija Petra Preradovića,
Virovitica

Naslov Priručnik za učenike fakultativnog predmeta *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima*

Radni naziv kurikuluma *Linearna funkcija i vektori u matematičkom programu GeoGebra i njihova primjena u obradi eksperimenata u fizici*

Izdavač Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica

Za izdavača Jasminka Viljevac

Urednica Jasminka Viljevac

Autori Mirjana Steiner, Branka Inđić, Dragan Klement, Željka Korlević, Marija Vidalina

Supervizori Ružica Vuk, Vlado Halusek, Danijel Jukopila, Aneta Copić, Mihaela Kelava

Supervizorica za jezik i gramatiku Izabela Babić

Oblikovale naslovnicu i grafički uredile Mateja Uzelac, Nikolina Hečimović

Dizajn logotipa projekta Grafoprojekt, Virovitica

Podatak o izdanju 1. izdanje

Mjesto i godina izdavanja Virovitica, 2016.

Naziv tiskare i sjedište Grafoprojekt, Virovitica

CIP zapis je dostupan u računalnom katalogu Gradske i sveučilišne knjižnice Osijek pod brojem 140602048.

ISBN 978-953-8147-07-4

Ova publikacija rezultat je projekta *Zajedno kroz prirodoslovlje* koji su provele nositelj projekta Gimnazija Petra Preradovića iz Virovitice s partnerima Srednjom školom Marka Marulića Slatina i Srednjom školom „Stjepan Ivšić“ Orahovica od 23. listopada 2015. do 23. listopada 2016. godine. Projekt je u cijelosti financirala Europska unija iz Europskog socijalnog fonda, a financijska sredstva u iznosu od 2 260 369,46 kn osigurana su temeljem natječaja *Promocija kvalitete i unaprjeđenja sustava odgoja i obrazovanja na srednjoškolskoj razini*.

Sadržaj ove publikacije isključiva je odgovornost Gimnazije Petra Preradovića, Virovitica.

Kurikulum i svi radni materijali su razvojni. Mogu se dopunjavati, popravljati i mijenjati.

Ova publikacija dostupna je na hrvatskom jeziku u elektroničkom obliku na mrežnoj stranici http://www.gimnazija-ppreradovica-vt.skole.hr/.

Riječi i pojmovni sklopovi koji imaju rodno značenje, bez obzira na to jesu li u tekstu korišteni u muškom ili ženskom rodu, odnose se na jednak način na muški i ženski rod.

Europska unija
Projekt je sufinancirala Europska unija iz Europskog socijalnog fonda
Ulaganje u budućnost

Gimnazija Petra Preradovića Virovitica

Srednja škola Marka Marulića, Slatina

Srednja škola "Stjepan Ivšić" Orahovica

Projekt *Zajedno kroz prirodoslovlje*

Linearna funkcija i vektori u eksperimentima

PRIRUČNIK ZA UČENIKE

Mirjana Steiner, prof. matematike i fizike, prof. mentor

Branka Inđić, prof. matematike i fizike, prof. savjetnik

Dragan Klement, prof. matematike i fizike, prof. mentor

Željka Korlević, dipl. ing. matematike, prof. savjetnik

Marija Vidalina, mag. educ. math. et inf.

Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica
Virovitica, 2016.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

U vašim je rukama priručnik za učenike fakultativnog predmeta nastao kao rezultat projekta *Zajedno kroz prirodoslovlje*, a financirala ga je Europska unija iz Europskog socijalnog fonda u okviru natječaja *Promocija kvalitete i unaprjeđenje sustava odgoja i obrazovanja na srednjoškolskoj razini*. Vrijednost projekta bila je 2 260 369,46 kuna, a trajao je od 23. 10. 2015. do 23. 10. 2016. godine.

Projekt *Zajedno kroz prirodoslovlje* prijavila je Gimnazija Petra Preradovića iz Virovitice, a partneri su joj bili Srednja škola Marka Marulića iz Slatine i Srednja škola „Stjepan Ivšić“ iz Orahovice.

Cilj projekta bio je uspostava programskih, kadrovskih i materijalnih uvjeta u gimnazijama Virovitičko-podravske županije koji će učenicima omogućiti stjecanje dodatnih kompetencija u području prirodoslovlja, matematike i informacijsko-komunikacijskih tehnologija.

Kurikulumi su zasnovani na ishodima učenja i izrađeni prema principima Hrvatskog kvalifikacijskog okvira (Zakon o HKO-u, MZOS 2013.) čime izravno doprinose njegovom daljnjem razvoju i provedbi.

Suradnički su ih izrađivali nastavnici Matematike, Informatike i prirodoslovnih predmeta triju gimnazija, stručnjaci na polju pedagogije i metodologije te profesori sveučilišnih kolegija na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Ciljne skupine ovog projekta jesu: nastavnici, učenici, stručni suradnici, vanjski stručnjaci i ravnatelji.

Sudjelovanjem ravnatelja triju gimnazija u provedbi projekta naglašena je važnost modernizacije kurikuluma za obrazovne ustanove. Ojačani kapaciteti gimnazija za izradu i provedbu inovativnih fakultativnih nastava (ljudski i materijalni potencijali) čine ustanovu atraktivnom i poželjnom za nastavak obrazovanja svim učenicima zainteresiranim za prirodoslovlje.

Kako bi podržali razvoj novih fakultativnih programa u školama, ali i doprinijeli razvoju programa svojim stručnim znanjima iz područja pedagogije/psihologije, stručni suradnici iz gimnazija sudjelovali su u edukacijama za razvoj kurikuluma temeljenog na ishodima učenja i unaprjeđenje nastavnih kompetencija. Stečenim znanjem i vještinama pružili su podršku ostalim nastavnicima za razvoj i implementaciju drugih fakultativnih programa, ali i prilagođavanju postojećih nastavnih programa zahtjevima HKO-a.

Postojeći su gimnazijski programi zastarjeli i nedovoljno su prilagođeni promjenama u suvremenom društvu. Naročito zabrinjava zastarjelost u prirodoslovnom i ICT području. Rezultati PISA istraživanja upućuju da su rezultati hrvatskih 15-godišnjaka ispod prosjeka u matematičkoj i prirodoslovnoj pismenosti. Često učenici nisu sposobni povezati znanja iz različitih nastavnih predmeta ili to čine površno i nesustavno. Znanja stečena u gimnazijskom nastavnom procesu uglavnom su teorijska i udaljena od neposredne životne zbilje. Stoga se nameće potreba za povezivanjem škole i života, znanja i vrijednosti, znanstvenih spoznaja i prakse.

Posljednjih godina učinjene su značajne promjene u smjeru poboljšanja hrvatskog obrazovnog sustava u predškolskom i osnovnoškolskom sektoru (HNOS, NOK), srednjem školstvu (reforma strukovnog obrazovanja, državna matura, NOK) i visokom školstvu (Bologna proces), a dovršen je i *Hrvatski kvalifikacijski okvir* (HKO) sukladno *Europskom kvalifikacijskom okviru* (EQF). Međutim gimnazijski kurikulum nije značajno strukturno promijenjen već pedesetak godina. Aktualni nastavni programi za gimnazije potječu iz 1994. i 1995. godine, a nastavni planovi iz 1995. godine i nisu zasnovani na ishodima učenja prema instrumentariju Hrvatskoga kvalifikacijskog okvira. Predmetna područja slabo su povezana, iako HKO i NOK omogućuju i potiču smisleno povezivanje svih sastavnica sustava u skladnu cjelinu. Nedostatno su zastupljeni novi oblici učenja i poučavanja, a osobito primjerena upotreba suvremenih tehnologija u poučavanju i učenju.

Naš doprinos promjenama koje svi očekuju jest osam novih kurikuluma fakultativne nastave s priručnicima za nastavnike, priručnicima za učenike te digitalnim radnim materijalima u Moodle-u.

Radni nazivi kurikuluma govore o sadržaju kurikuluma i o smjeru kojim idemo: Zemlja u geografiji, fizici i matematici, Linearna funkcija i vektori u matematičkom programu GeoGebra i njihova primjena u obradi eksperimenata u fizici, Funkcije u matematičkom programu GeoGebra i njihova primjena u prirodoslovlju, Biološki sustavi u ekologiji i matematici, Biologija s kemijom u životnim procesima, Termodinamika i kvantna mehanika u fizici i kemiji u računima i eksperimentima, Fizikalni eksperimenti i modeli kao osnova rada tehničkih uređaja i Informatika. Nazivi fakultativnih predmeta koji su iz njih proizašli jesu:

1. *Geografija rizika i klimatske promjene*
2. *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima*
3. *Funkcije u prirodoslovlju*
4. *Biološki sustavi i matematika*
5. *Biologija s kemijom u životnim procesima*
6. *Fizikalna kemija*
7. *Fizikalni eksperimenti*
8. *Informatika u multimediji i dizajnu.*

UVOD

Fakultativni predmet *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima* nastao je iz potrebe da se pokaže neodvojiva veza između proučavanja sadržaja predmeta matematike i fizike te da se ukaže kako taj zadatak može biti lakše i zanimljivije izvršen korištenjem modernih tehnologija. Radni naziv kurikuluma *Linearna funkcija i vektori u matematičkom programu GeoGebra i njihova primjena u obradi eksperimenata u fizici* opisuje upravo tu ideju tima koji je osmislio kurikulum.

Matematika je zapravo jezik fizike i neodvojivost matematike i fizike kao znanosti vidljiva je na svakom nivou: iskazivanje iznosa fizikalnih veličina pomoću brojeva – podataka s brojevnog pravca ili kroz koordinatni sustav, zorni prikaz pozitivnih i negativnih veličina (predznak broja), uspoređivanje fizikalnih veličina, grafičko prikazivanje fizikalnih međuovisnosti pomoću linearnih i nelinearnih funkcija – sve je to matematički jezik svijeta oko nas.

Kako znanost (fizika) poboljšava naš svakodnevni život, vrlo je zanimljivo prikazano u knjizi *The Physics of Materials* - How Science Improves Our Lives (The National Academies Press, 1997. engl.). Priča prati poslovnu ženu koja putujući prema aerodromu autom (izrađen od sintetiziranih materijala) telefonira mobitelom (na bazi složene poluvodičke elektronike) sinu, koji rola (kotači od polimera) prema fakultetu slušajući glazbu s CD-a (od materijala za optičku pohranu podataka koje čitaju poluvodički laseri) da mu kaže kako baka leži u bolnici gdje joj ugrađuju umjetni kuk (od biomaterijala) nakon pregleda magnetskom rezonancijom (koja se temelji na supravodljivim magnetima) i konzultacije liječnika (putem interneta i svjetlovoda). Na aerodromu ulazi u avion (od superslitina), sjeda na svoje mjesto i otvara notebook (koji ima ekran s tekućim kristalima i procesor koji ovisi o magnetskim materijalima i silikonskoj tehnologiji).

Danas se svi poput junakinje ove knjige služimo blagodatima moderne tehnologije i ne primjećujući što nas okružuje, često to ni ne pokušavajući razumjeti i nakon toga još korisnije upotrijebiti. Učenici koji odaberu predmet *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima* načinit će prvi korak prema osvješćivanju neposredne okoline i time dobiti priliku da proučavanjem neposredne stvarnosti, uz pomoć matematičkih alata i kompjutorske tehnologije lakše razumiju svijet. Također će naučiti osnove metodologije istraživačkog rada koji je temelj u razvoju znanosti.

Predmet je namijenjen učenicima drugog i trećeg razreda gimnazija i strukovnih škola, i to ne samo onima koji planiraju nastaviti studij na prirodoslovnim fakultetima jer je osnovna metodologija istraživačkog rada zajednička svima.

Materijali pripremljeni tijekom projekta namijenjeni su učenicima i nastavnicima: nastavnicima kao podloga za pripremanje izvedbe, ali i kao ideja za neki novi kreativni pristup temama iz kurikuluma; učenicima kao pomoć u savladavanju sadržaja i putokaz za daljnji napredak.

Osim klasične nastave predviđeno je učenje na daljinu korištenjem platforme za e-poučavanje. Učenici i nastavnici na taj način dobivaju mogućnost individualizacije nastave i prilagodbe navikama i mogućnostima svakog učenika, što je posebno dragocjeno za naše učenike putnike. Učenicima se nudi samostalnost putem online rada u njihovim domovima, u količini i terminima koji im najbolje odgovaraju. Nastavnicima je omogućeno praćenje rada svakog učenika i vrednovanje individualnog doprinosa realizaciji pojedinog zadatka.

Kurikulum fakultativnog predmeta *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima* doprinosi kvalitetnijem obrazovanju na više razina. Temeljen je na ishodima učenja prema metodologiji HKO-a, uvodi suvremene tehnologije u metode poučavanja i potiče učenike da tehnologiju koriste u svrhu lakšeg i kvalitetnijeg učenja te omogućava stjecanje novih kompetencija učenika u različitim područjima. Time značajno doprinosi razvoju učenika kao cjelovite osobe i potiče osobni rast svakog pojedinca.

Kurikulum i svi radni materijali su razvojni. Mogu se dopunjavati, popravljati i mijenjati.

Želimo vam puno uspjeha.

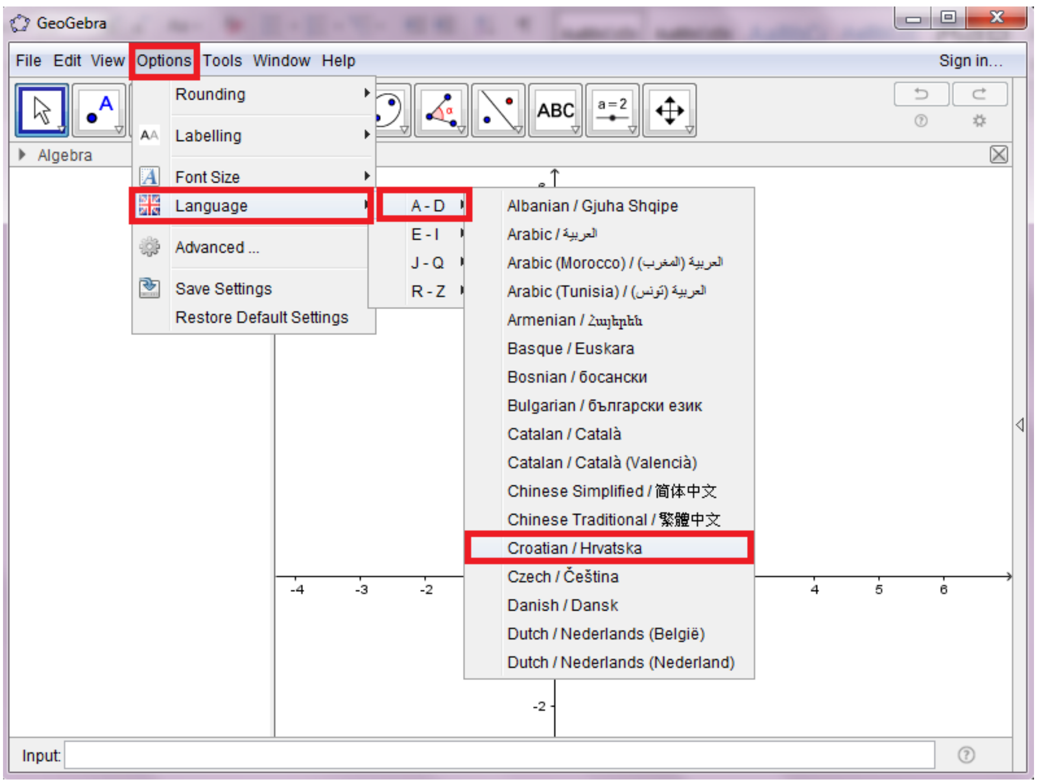
1. GEOGEBRA

U samom nazivu ovog fakultativnog predmeta doznaje se da će se podaci dobiveni eksperimentom obrađivati u programu GeoGebra. GeoGebra je jedan od najčešćih odabira hrvatskih nastavnika Matematike (sve češće i Fizike) zbog dostupnosti i lakoće korištenja te preglednosti i mogućnosti uređivanja grafova. Instalacija GeoGebre vrlo je jednostavna: preuzimanje instalacijske datoteke sa stranice https://www.geogebra.org/download, a dalje je samo potrebno slijediti upute. GeoGebra je besplatan alat dostupan svima na službenim stranicama.

Tijekom sudjelovanja u ovom fakultativnom predmetu osposobit ćete se za korištenje GeoGebre na više razina: osnovnoj za ucrtavanje točaka, crtanje grafova funkcija i crtanje grafova iz tablice koja prikazuje podatke dobivene eksperimentom te višoj razini za koju se ne može reći što je granica. Zainteresirani učenik može dostići razinu programiranja u GeoGebri, korištenja složenijih naredbi, istraživanjem može samostalno izrađivati GeoGebra aplete kakve zamisli.

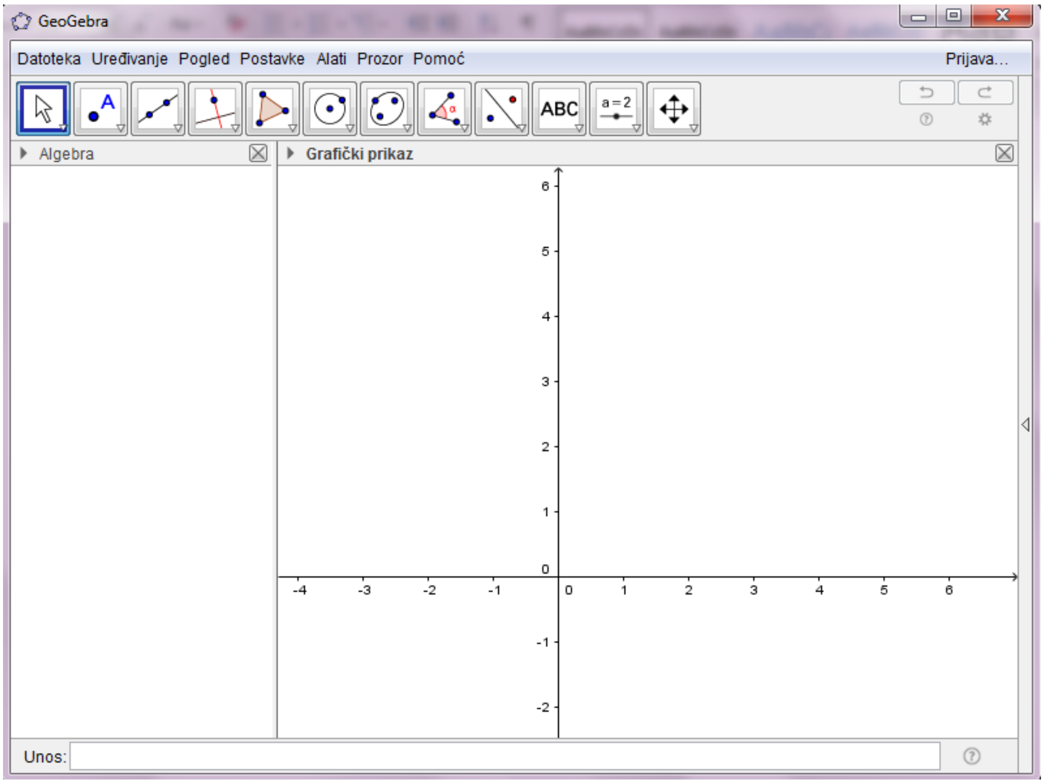
Odabir jezika

Jezik se u GeoGebri može vrlo jednostavno promijeniti. Na slici 1.1. prikazano je kako promijeniti jezik. Odabirom naredbe Options otvara se padajući izbornik u kojem je potrebno odabrati opciju Language. Zatim se otvara novi padajući izbornik u kojem su jezici poredani abecednim redom, a do željenog se dolazi odabirom opcije koja ima početno slovo jezika. Tako na primjer za promjenu jezika u hrvatski odabiremo prvu opciju, dakle jezike koju počinju slovima u rasponu A – D, otvara se novi padajući izbornik u kojem odabiremo jezik Croatian/Hrvatska.



Slika 1.1. Odabir jezika u GeoGebri

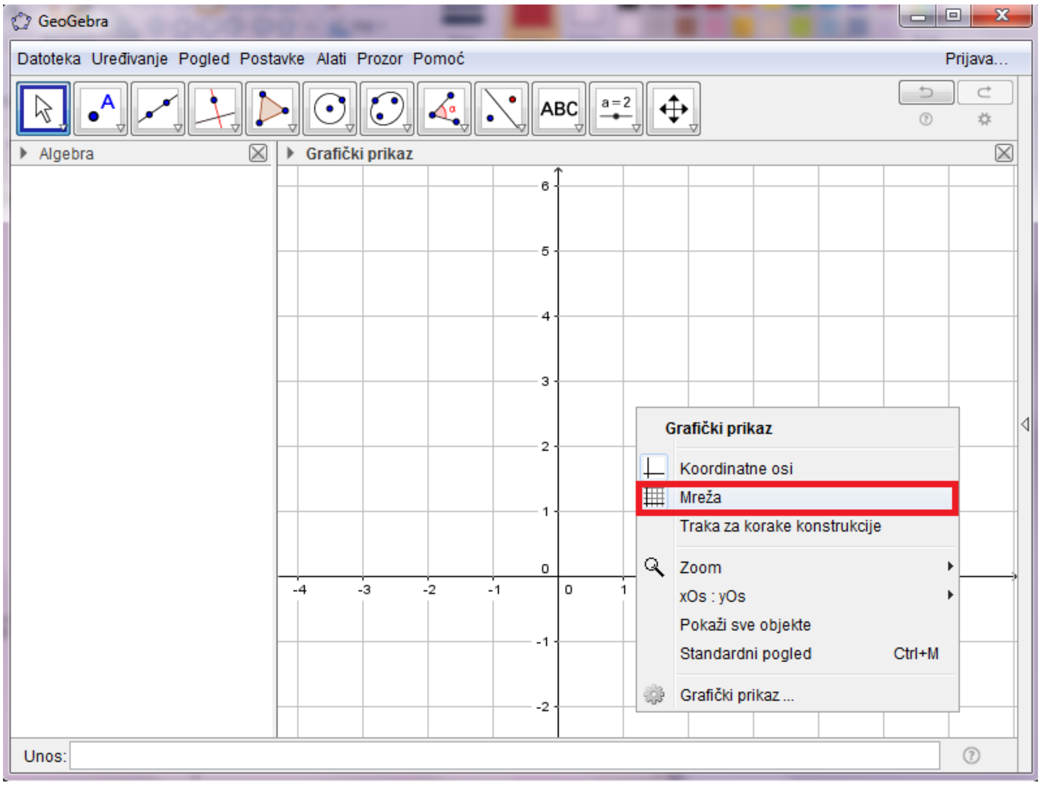
Na slici 1.2. prikazano je korisničko sučelje na hrvatskom jeziku.



Slika 1.2. GeoGebra na hrvatskom jeziku

Mreža

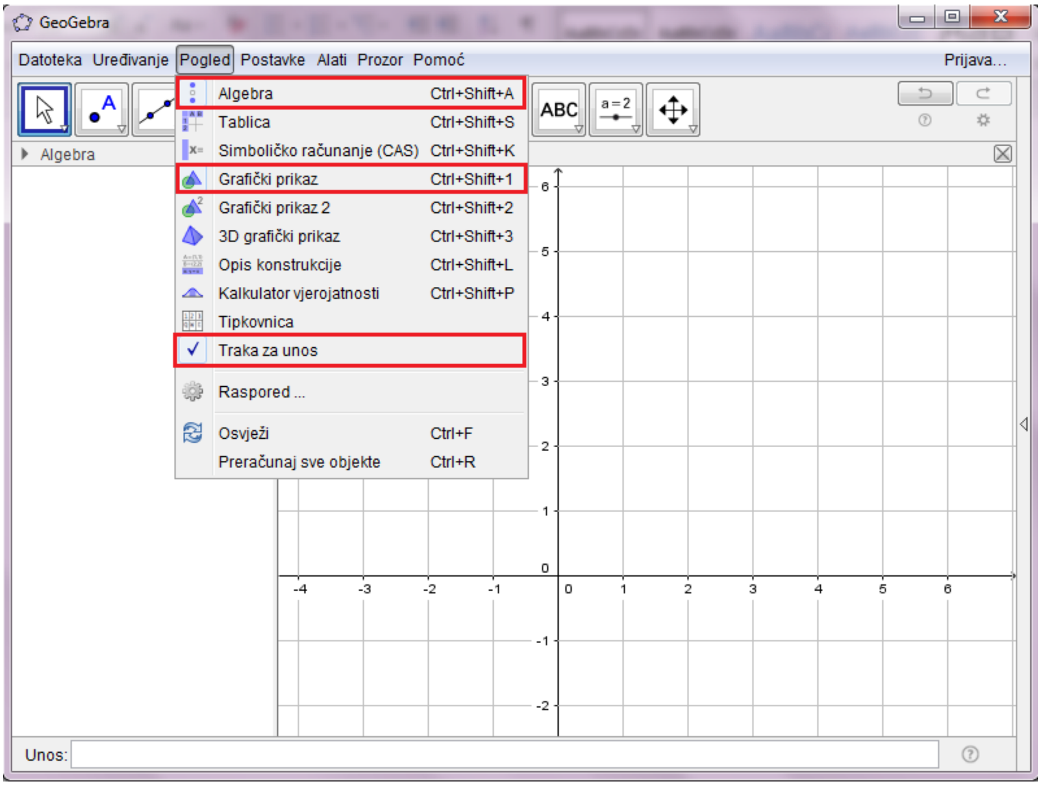
Uključivanje/isključivanje koordinatne mreže najjednostavnije se izvršava desnim klikom u koordinatnom sustavu i odabirom naredbe Mreža. (Slika 1.3.)



Slika 1.3. Koordinatna mreža

Slično odabirom naredbe Koordinatne osi uključuju se/isključuju koordinatne osi.

Pogled



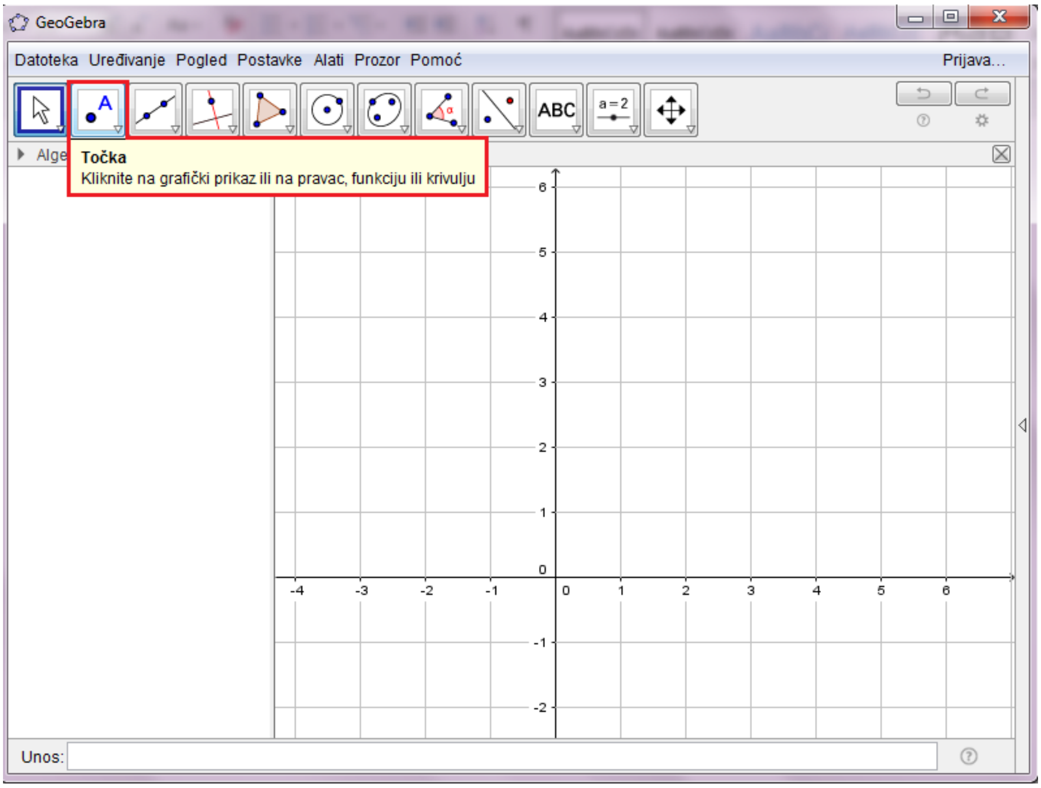
Slika 1.4. Pogled

Otvaranjem GeoGebre automatski su prikazana tri dijela: Algebra (lijevi dio u kojem je popis objekata s kojima radimo), Grafički prikaz (desni dio s koordinatnim sustavom u kojem se prikazuju grafički prikazi objekata s kojima radimo) i Traka za unos (dolje, služi za unos naredbi). (Slika 1.4.)

Odabirom neke od ponuđenih naredbi u padajućem izborniku Pogled otvara se odabrani dio (npr. Tablica za unos podataka u tabličnom prikazu, 3D grafički prikaz otvara koordinatni sustav u tri dimenzije…) Naredba Opis konstrukcije vrlo je korisna jer njome dobivamo sve korake pri konstruiranju objekata, možemo pratiti konstrukciju, a također i pokrenuti animaciju, to jest konstrukciju korak po korak po redoslijedu izvođenja te također prilagođavati brzinu animacije.

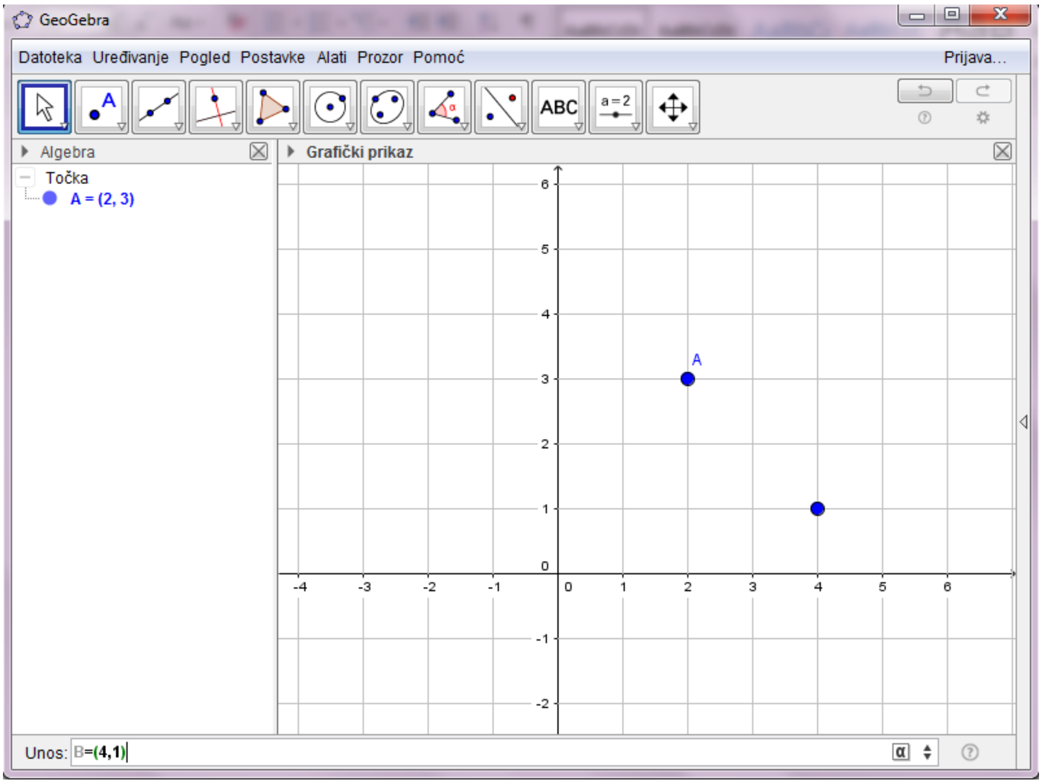
Točke

Točke je veoma jednostavno grafički prikazati. Zadržavanjem pokazivača miša iznad naredbi prikazanih slikama pokazuje se tekstualni okvir koji objašnjava koja je naredba prikazana slikom i kako ju iskoristiti. (Slika 1.5.)



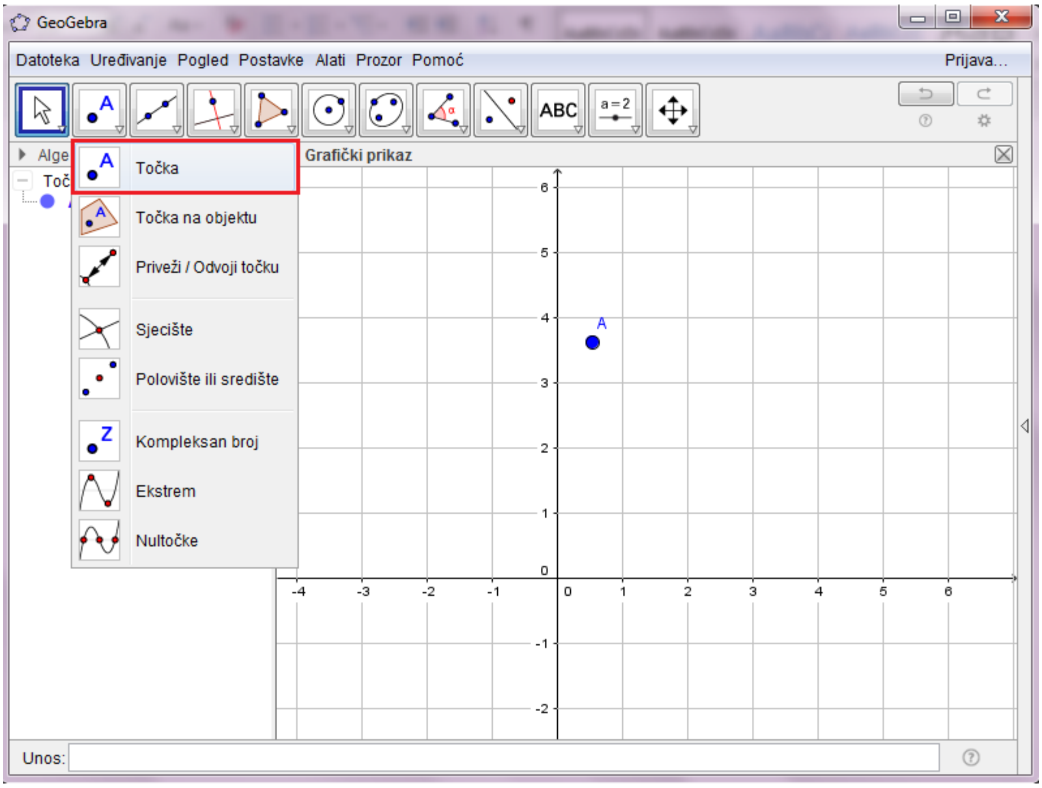
Slika 1.5. Točka – opis naredbe

Pritiskom lijevog gumba miša (odabirom naredbe Točka) i pritiskom bilo gdje u koordinatnom sustavu crta se točka. Točku s određenim koordinatama crtamo tako da miš namjestimo na mjesto u koordinatnoj mreži koje je određeno tim koordinatama. Pri tome treba biti jako precizan i lako je naslutiti da mora postojati način za preciznije crtanje točaka bez namještanja miša po koordinatnom sustavu i pogađanja koordinata. Tome služi traka za unos. U traku za unos upišemo „ime točke = (x koordinata, y koordinata)“ na primjer $A = (2,3)$. Pritiskanjem tipke Enter na tipkovnici crta se točka u koordinatnom sustavu, a lijevo u dijelu Algebra prikazane su koordinate nacrtane točke. (Slika 1.6.)



Slika 1.6. Crtanje točke

Odabirom strelice dolje desno na naredbi Točka otvara se padajući izbornik s različitim opcijama za crtanje točke. (Slika 1.7.)

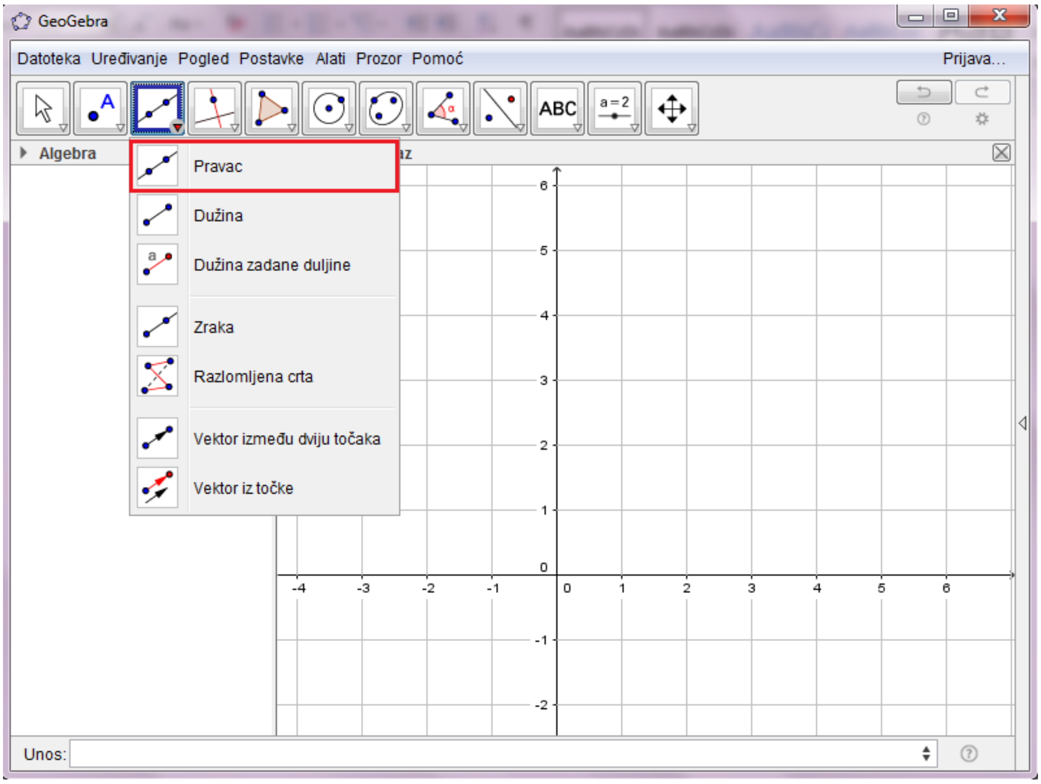


Slika 1.7. Točka

Lako je uočiti da je u GeoGebri veoma jednostavno nacrtati sjecište dvaju objekata ili njihovo polovište/središte. Također se jednostavno određuju nultočke i ekstremi funkcija. Zanimljivo je da odabirom određene naredbe, na primjer Nultočke osim grafičkog prikaza nultočaka, u dijelu Algebra GeoGebra daje koordinate nacrtanih točaka. To je podatak koji treba zapamtiti za kasnije račune koji će se provoditi u ovom fakultativnom predmetu.

Pravci

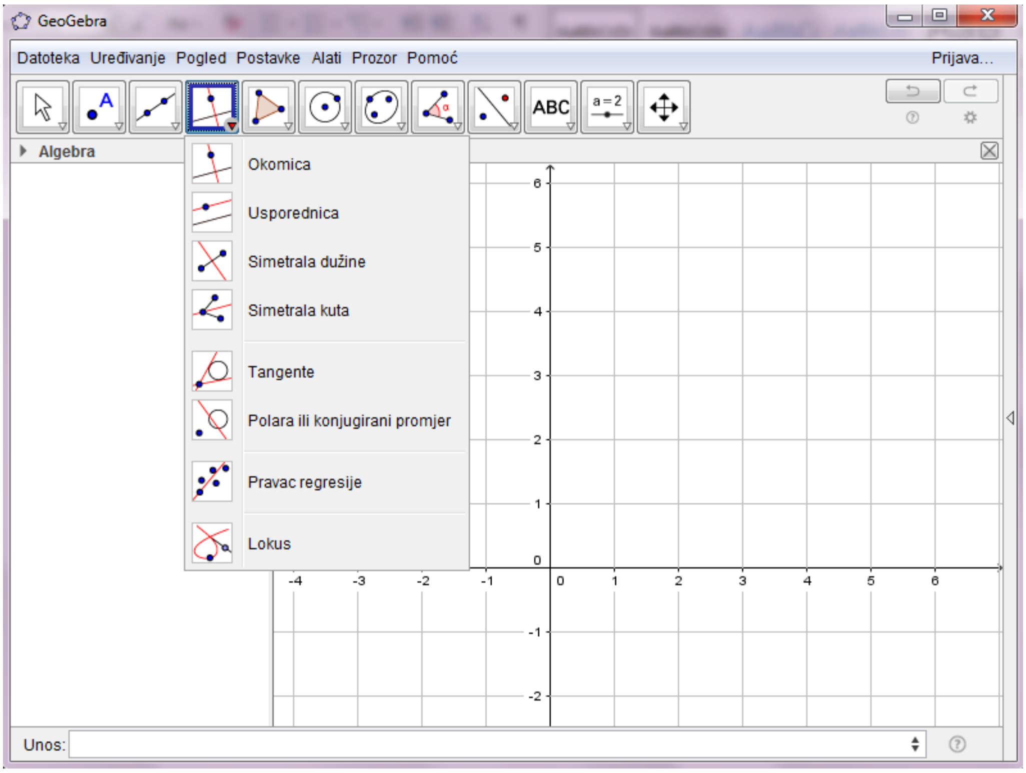
Crtanje pravaca jednostavno je kao i crtanje točaka. (Slika 1.8.)



Slika 1.8. Pravac

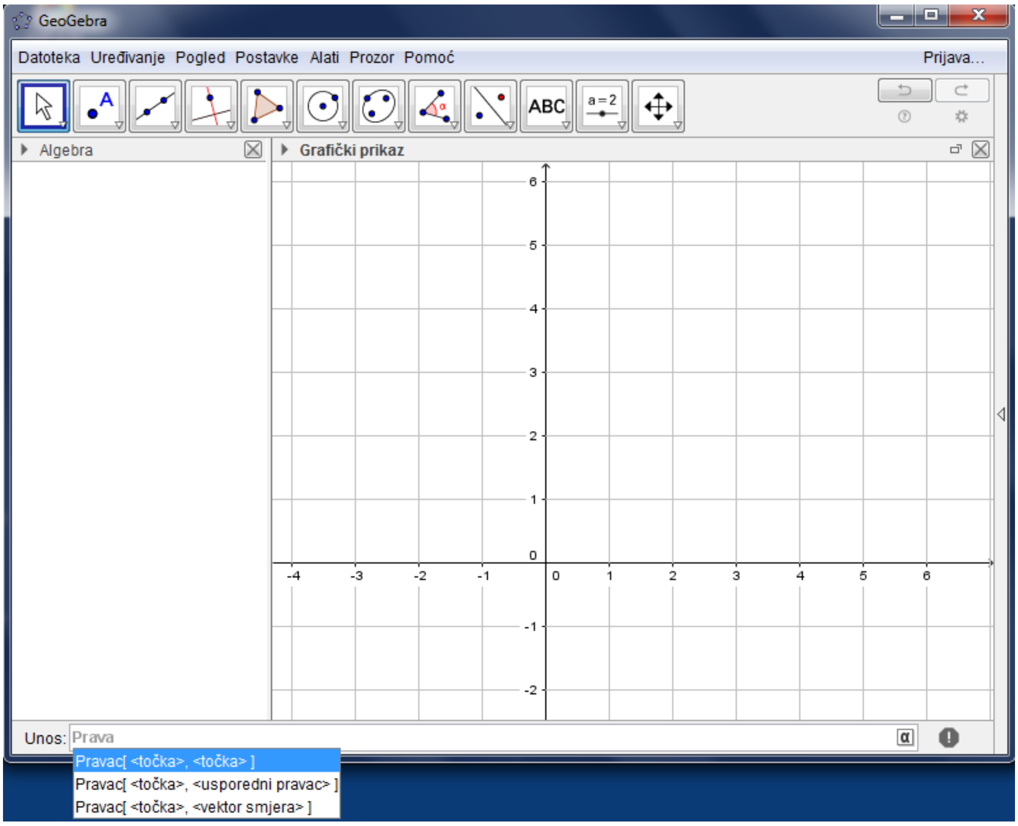
Pravac se može crtati na nekoliko načina, a dva su osnovna: pravac kroz dvije točke i upisivanjem jednadžbe pravca u traku za unos.

U GeoGebri se također veoma jednostavno mogu dobiti okomiti i paralelni pravci, simetrale dužina, kutova, tangente… (Slika 1.9.)



Slika 1.9. Neke mogućnosti GeoGebre

Pravci se mogu crtati s drugim podacima, ne samo kroz dvije točke. Jedan način crtanja pravaca jest korištenje trake za unos upisujući riječ Pravac, a zatim odabirući jednu od ponuđenih opcija, ovisno o tome koje podatke želimo koristiti pri crtanju pravca. (Slika 1.10.)

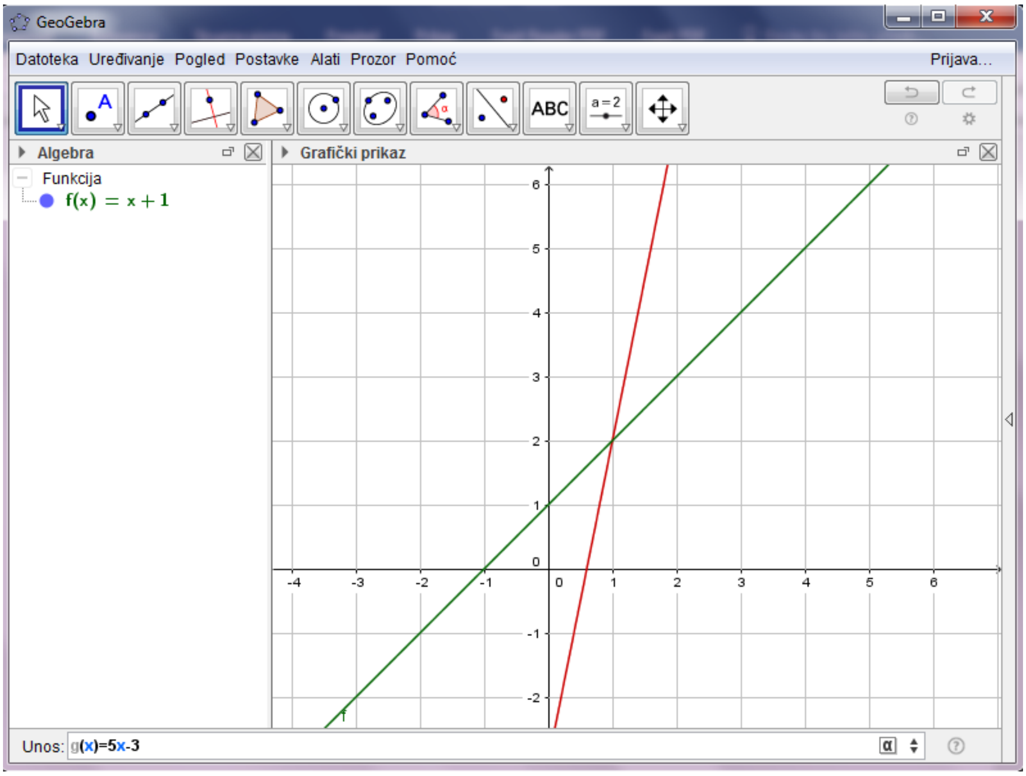


Slika 1.10. Crtanje pravca koristeći traku za unos

Zadatak 1.1. Nacrtajte pravac koji prolazi točkama $A(1,2)$ i $B(-3,-2)$.

a) Iščitaj jednadžbu tog pravca.
b) Pripada li točka $O(0,0)$ tom pravcu?
c) Nacrtaj pravac koji prolazi točkom $C(-1,3)$ okomit na pravac AB.
d) Nacrtaj pravac koji prolazi točkom $D(2,0)$ paralelan pravcu AB.

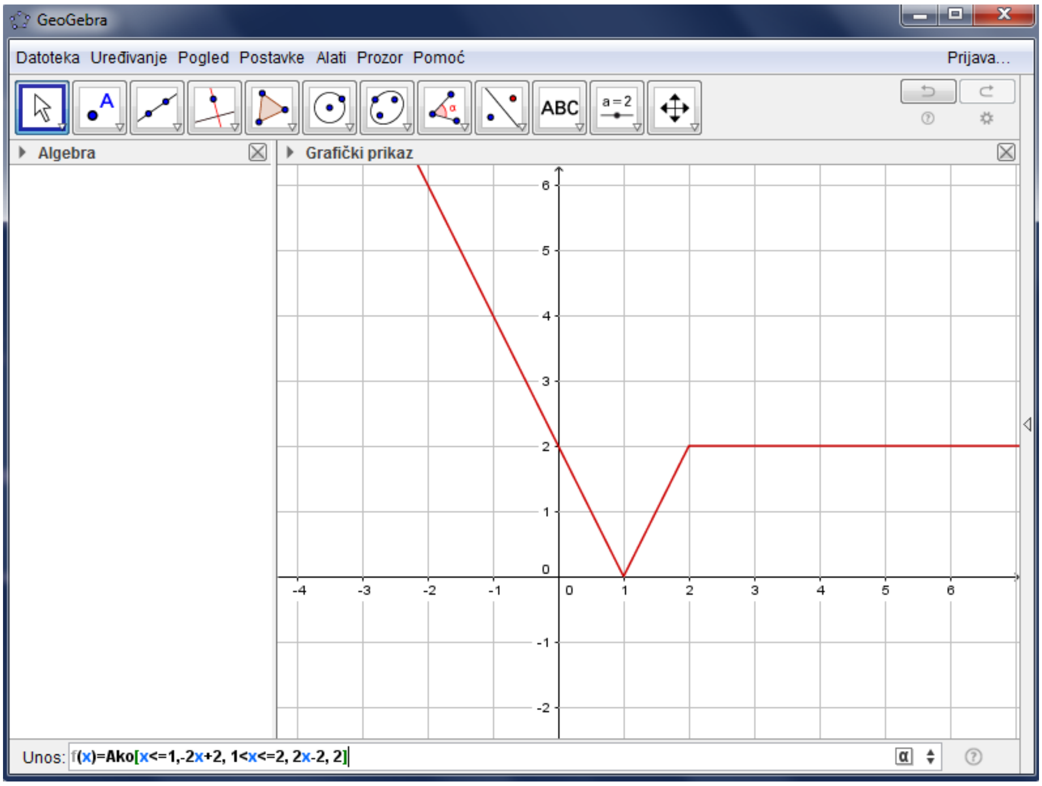
Graf **linearne funkcije** crta se jednostavnim upisivanjem funkcije u traku za unos (Slika 1.11.) ili upisivanjem riječi Funkcija u traku za unos te odabirom jedne od ponuđenih naredbi, ovisno o podacima kojima raspolažemo.



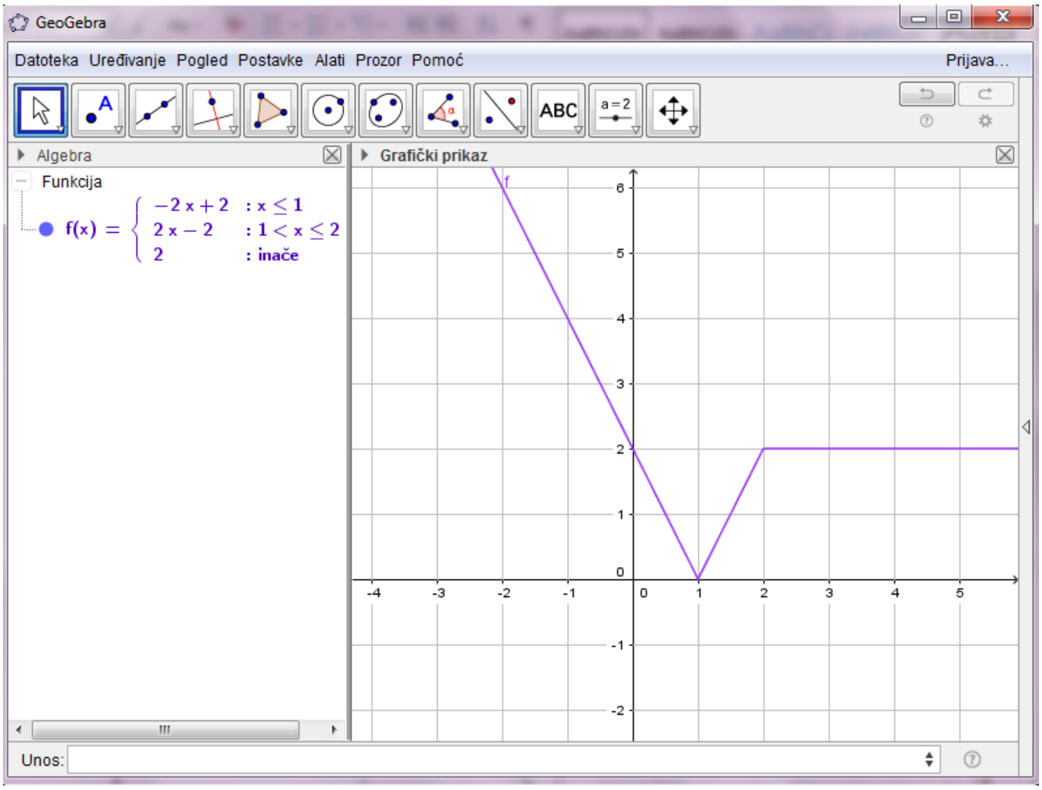
Slika 1.11. Graf linearne funkcije

Graf funkcije zadane po dijelovima dobije se postavljanjem uvjeta pri upisivanju funkcije u traku za unos. (Slika 1.12.)

Pritiskom tipke Enter na tipkovnici graf funkcije je nacrtan, a algebarski zapis funkcije vidi se u dijelu Algebra. (Slika 1.13.)



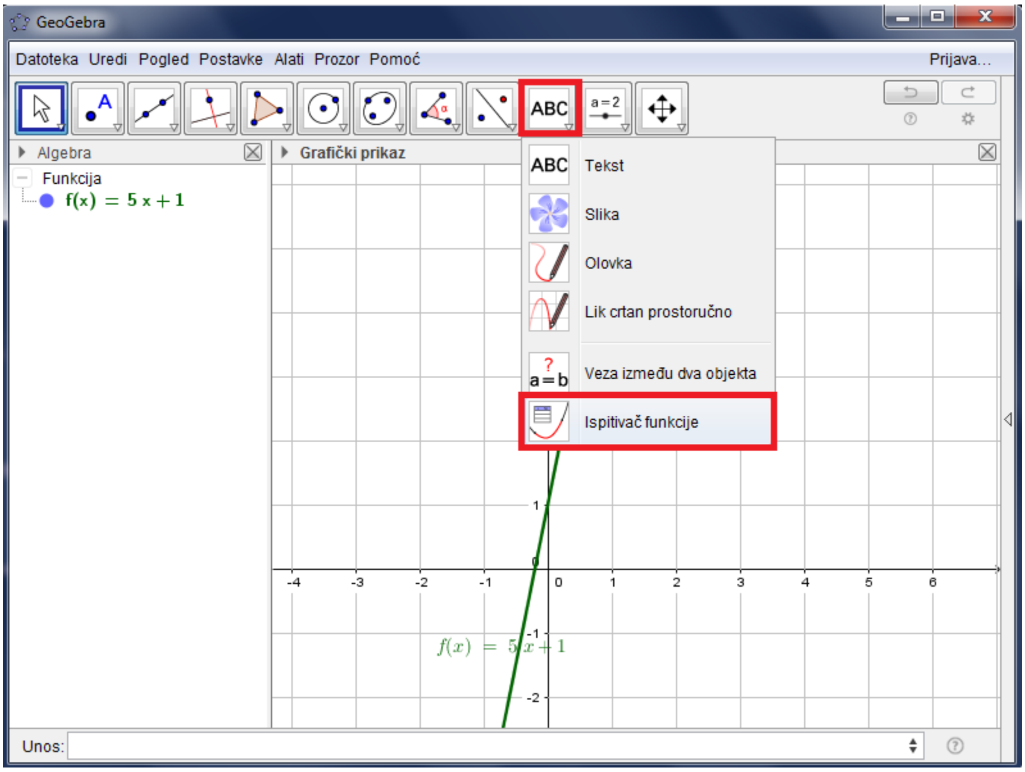
Slika 1.12. Funkcija zadana po dijelovima



Slika 1.13. Funkcija zadana po dijelovima

Ispitivač funkcije

Funkcije treba analizirati. Koristeći GeoGebrin alat Ispitivač funkcije vrlo brzo možemo izračunati vrijednost funkcije u točki, odrediti ekstremnu vrijednost na nekom intervalu, odrediti nultočke na nekom intervalu…



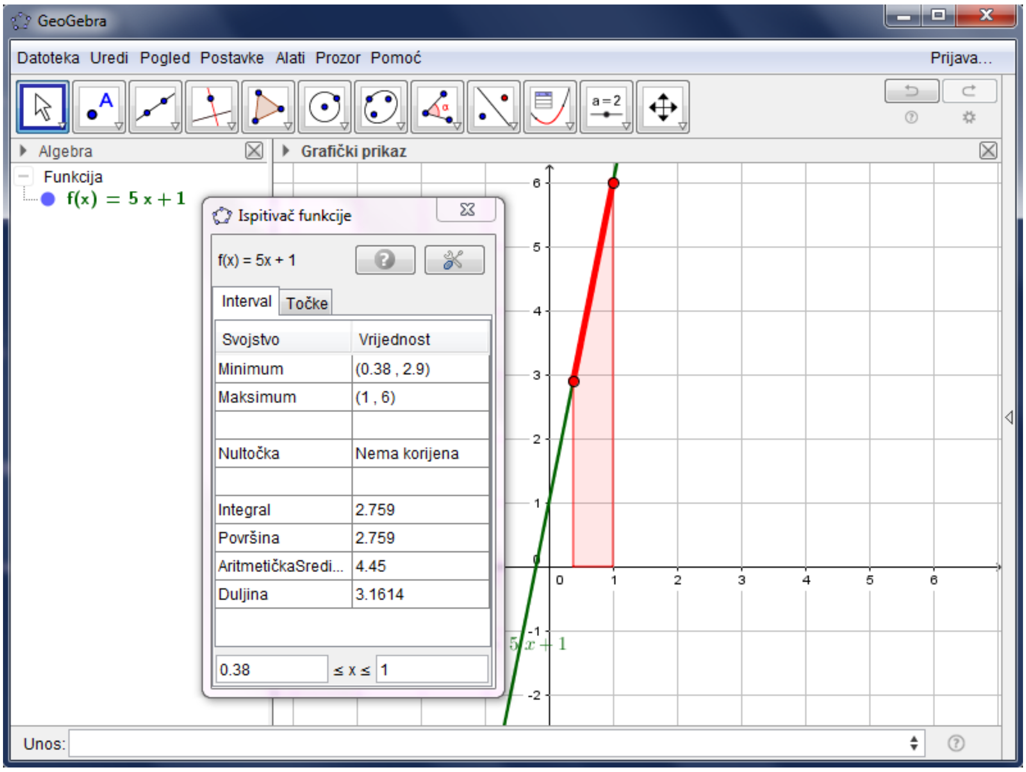
Slika 1.14. Ispitivač funkcije

Nakon odabira Ispitivača funkcije potrebno je odabrati funkciju koju želimo ispitati. Otvara se prozor u kojem je u donjem dijelu zadan interval na kojem se funkcija promatra. Unošenjem drugih vrijednosti moguće je promijeniti taj interval. On je na grafičkom prikazu označen crvenom bojom. (Slika 1.15.)

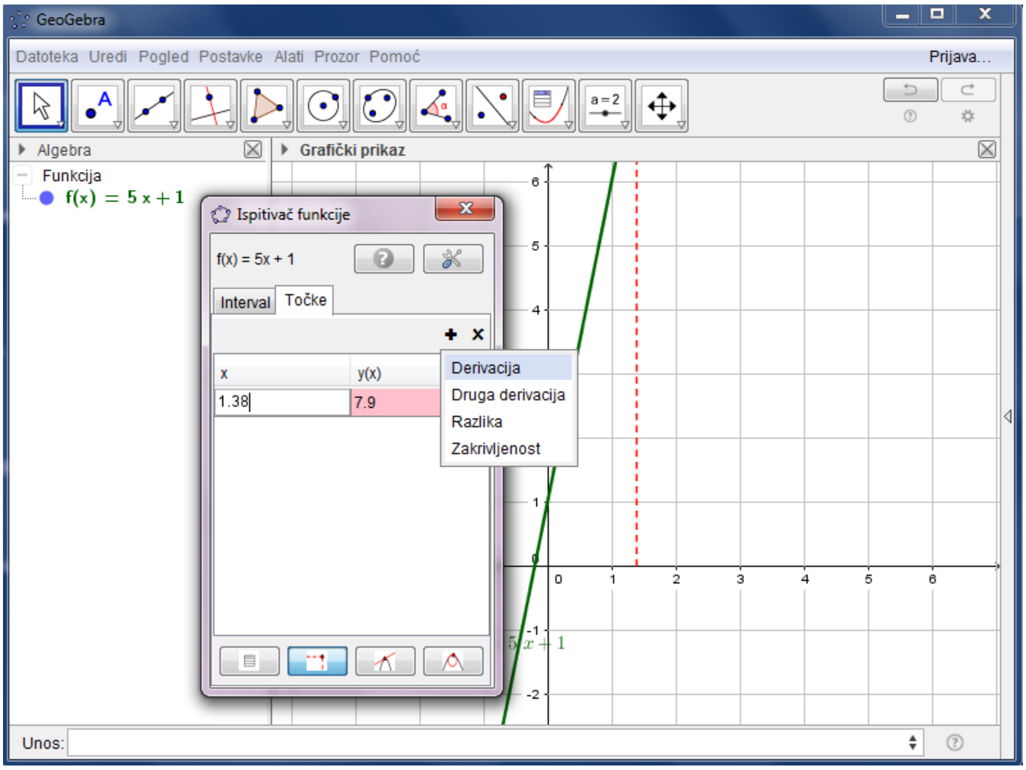
Postoji još mogućnosti za ispitivanje svojstava funkcije. Neke od njih dobiju se odabirom druge kartice Točke gdje možemo izračunati vrijednost funkcije za bilo koju vrijednost varijable x. Osim toga moguće je dobiti popis točaka, tangentu, računati derivaciju u točki, drugu derivaciju… (Slika 1.16.)

Zadatak 1.2. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = 2x - 1$. Promatrajte interval $\langle -2, 2 \rangle$. Koristeći Ispitivač funkcije, odgovorite na sljedeća pitanja:

a) Postoji li nultočka na ovom intervalu? Ako da, odredite ju.
b) Koliko iznosi površina ispod grafa funkcije f?
c) Odredi vrijednost funkcije f za $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0, x_3 = -0.5$.

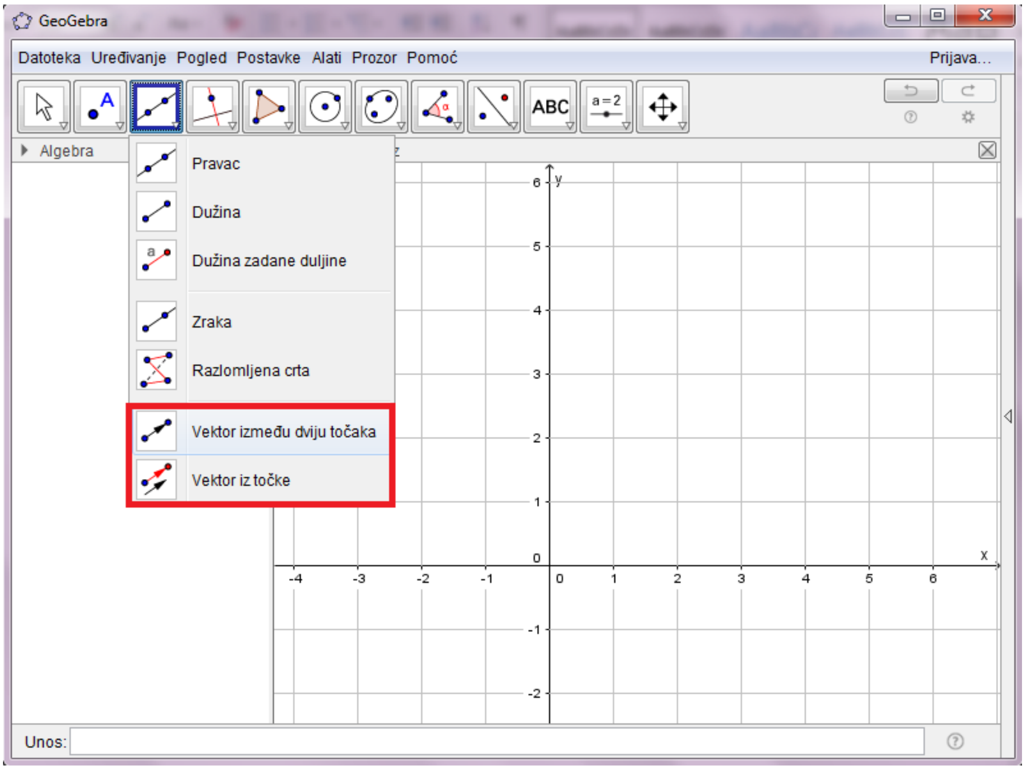


Slika 1.15. Ispitivač funkcije – Interval



Slika 1.16. Ispitivač funkcije – Točke

Vektori



Slika 1.17. Vektori

Naredbe za crtanje vektora nalaze se u istom padajućem izborniku kao naredba za crtanje pravca. (Slika 1.17.) Odabirući naredbu koja nam odgovara vrlo brzo dobijemo vektor. Drugi je način crtanja vektora koristeći traku za unos tako da se upiše riječ Vektor i odabere naredba koja nam je povoljna ovisno o podacima kojima raspolažemo.

Pokušajte samostalno: Istražite naredbu translacija za vektor. Nacrtajte neki objekt, po volji vektor i preslikajte taj objekt.

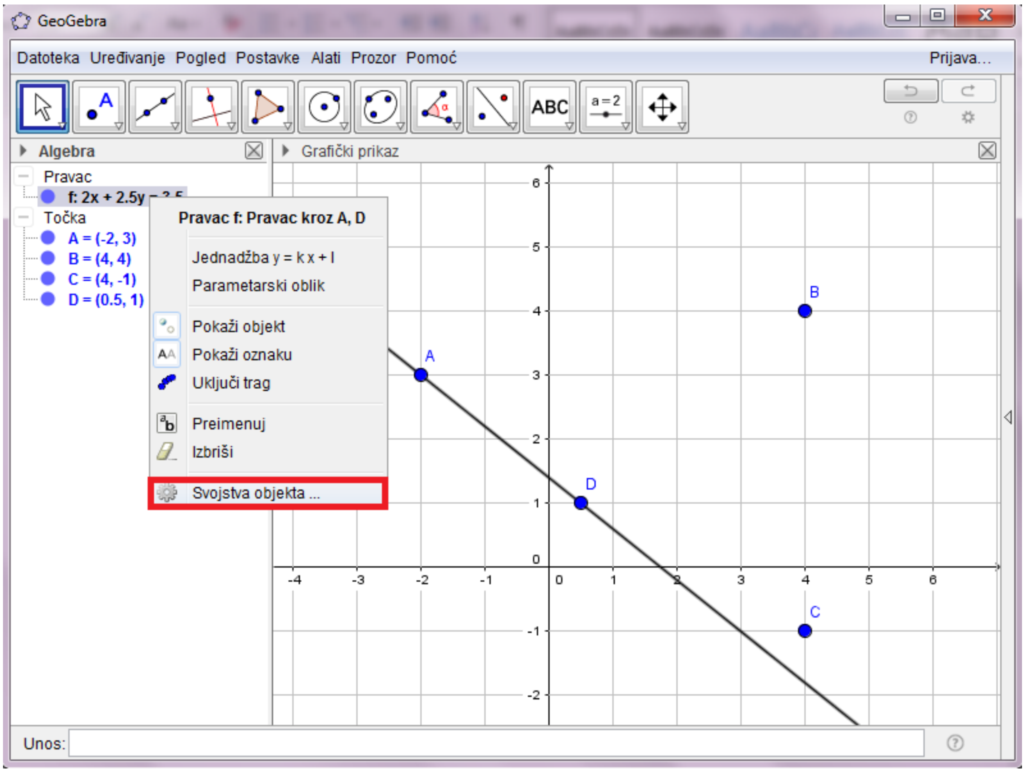
Stil objekta

Svaki objekt koji grafički prikazujemo ima neki svoj stil: boju, debljinu crte, oblik…

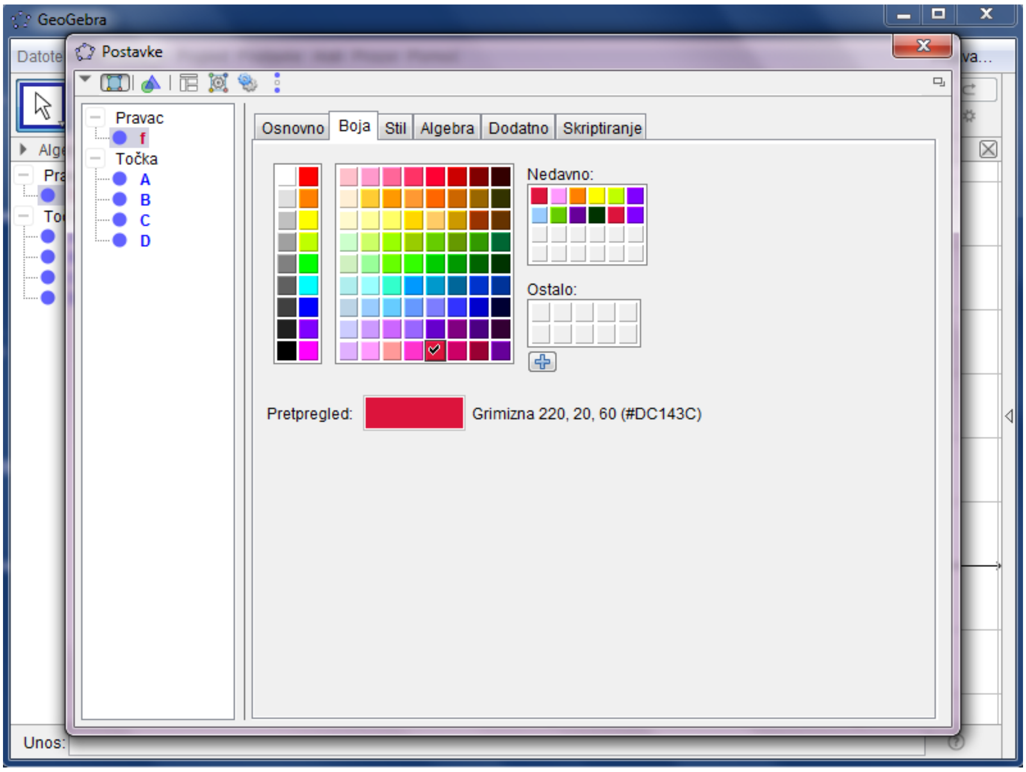
Boja

Točke su u GeoGebri inicijalno plave boje, no lako im se promijeni boja. Crtajući pravce svaki bude obojan različitom bojom. GeoGebra ima velik spektar boja i ne postoji razlog da se to ne iskoristi pri učenju. Različito obojani objekti prvenstveno dovode do brzog uočavanja veza među objektima, presjeka i ostalih mogućih situacija koje nas mogu zanimati.

Boja objekta najjednostavnije se promijeni desnim klikom na objekt (u grafičkom prikazu ili u odjeljku Algebra što je sigurnije i preciznije) i odabirom opcije Svojstva objekta. (Slika 1.18. Stil objekta) Otvara se dijaloški okvir Postavke u kojem imamo više opcija za uređivanje objekta, a ako nam je cilj promijeniti boju, odabiremo Boja. (Slika 1.19.) Odabirom željene boje objekt mijenja boju u odabranu. Ukoliko nam nijedna od ponuđenih boja ne odgovara, pritiskom na gumb + otvara se novi dijaloški okvir u kojem možemo „miješati“ crvenu, zelenu i plavu boju (RGB).



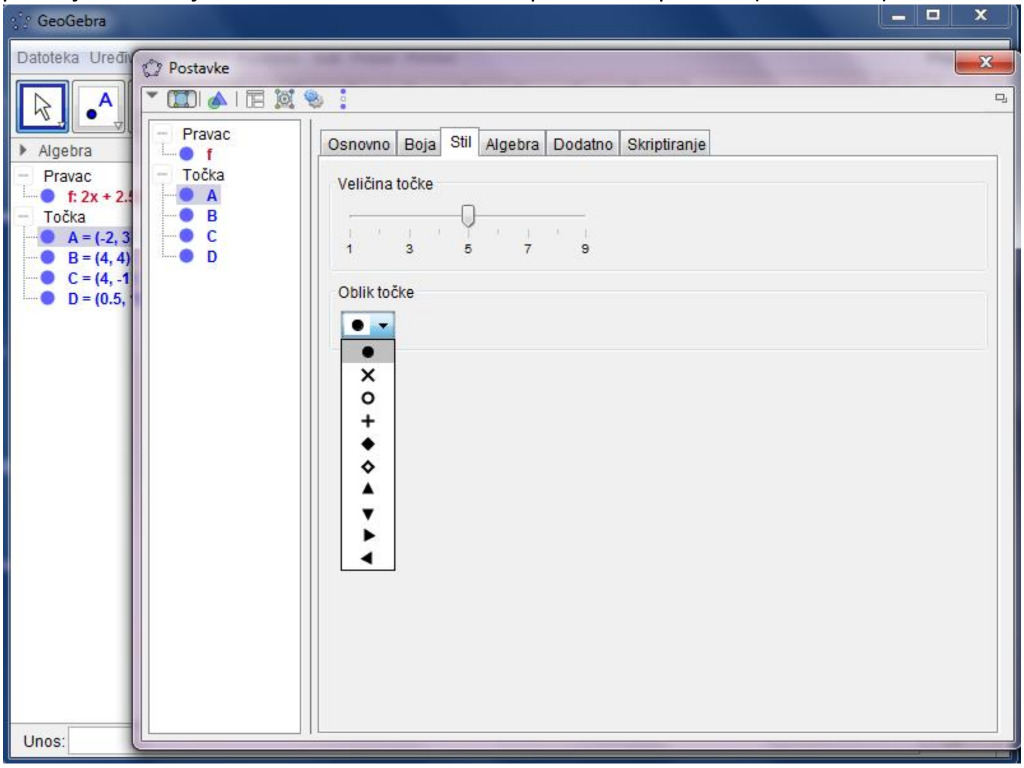
Slika 1.18. Stil objekta



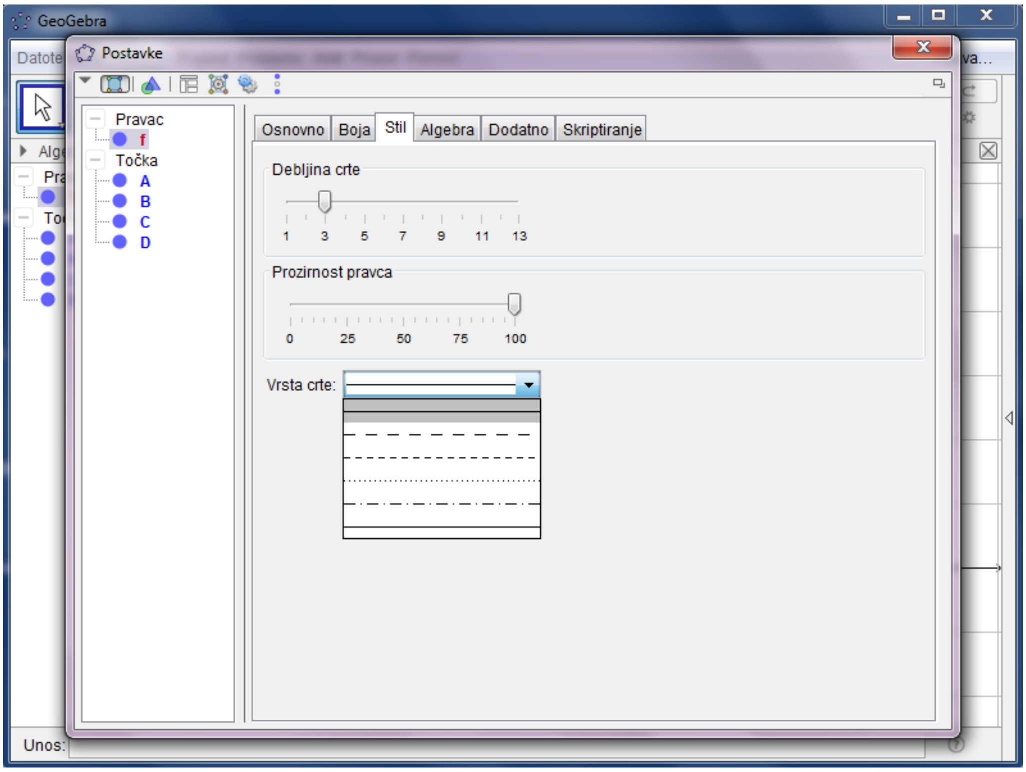
Slika 1.19. Promjena boje

Veličina

Slično kao boju svakom objektu možemo mijenjati veličinu. Točkama se može promijeniti veličina same točke (oznake kojom je točka prikazana) (Slika 1.20.), pravcima se može promijeniti debljina crte i vrsta same crte te prozirnost pravca. (Slika 1.21.)



Slika 1.20. Stil točke



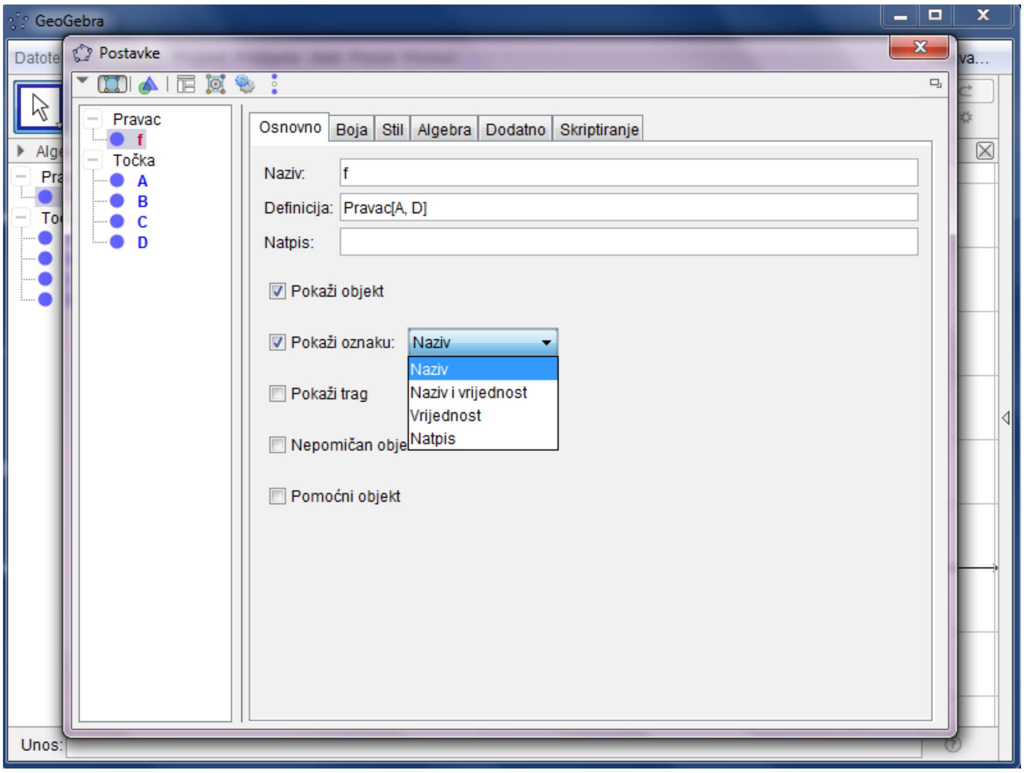
Slika 1.21. Stil pravca

Oznake

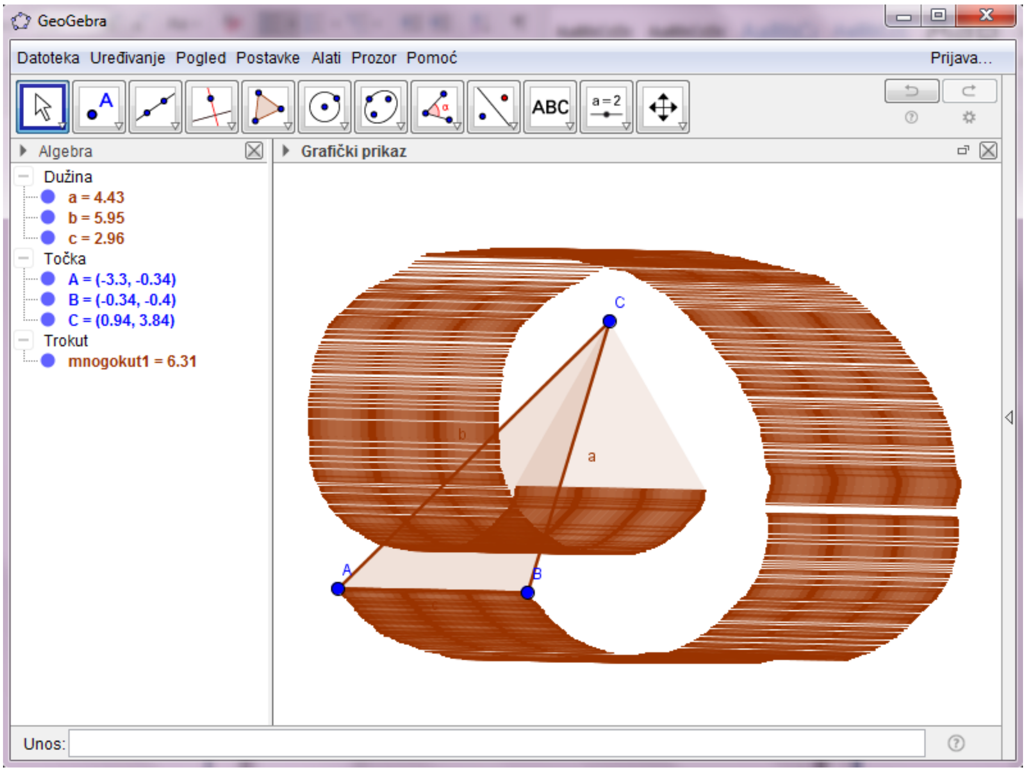
Svaki objekt koji grafički prikažemo može biti prikazan (vidljiv) ili skriven (pomoćni objekt). Vidjeli smo da točkama možemo birati oblik, veličinu i boju oznake, slično kao kod pravca, no osim toga važno je znati da svakom objektu možemo dodijeliti ime koje nama odgovara. Program sam svakom novom objektu dodijeli neko ime. Promjena naziva vrši se djelomično istim postupkom kao promjena stila oznake: desni klik na objekt, u padajućem izborniku izabrati Svojstva objekta, zatim u dijaloškom okviru Postavke odabrati karticu Osnovno i u tekstualni okvir Naziv upisati naziv objekta. (Slika 1.22.)

U ovom dijelu biramo još neke opcije:

- Pokaži objekt: potvrdni okvir kojim odabiremo vidljivost samog objekta (pravca, točke...),
- Pokaži oznaku: potvrdni okvir kojim odabiremo vidljivost oznake objekta (objekt može biti prikazan bez oznake, na primjer pravac bez naziva); desno odabiremo što će biti oznaka objekta (vrijednost označava koordinate točke za točku, jednadžbu pravca za pravac...) (Slika 1.22.),
- Pokaži trag: potvrdni okvir kojim odabiremo vidljivost objekta i kada ga sakrijemo; korisna opcija pri konstrukcijama ili kada se želi prikazati nastanak nekog grafa... (Slika 1.23.),
- Nepomičan objekt: kao što sam naziv kaže objekt postaje nepomičan, ne možemo ga micati po koordinatnom sustavu,
- Pomoćni objekt: ne bude prikazan u odjeljku Algebra, grafički je prikaz vidljiv; koristan pri konstrukcijama.



Slika 1.22. Označavanje objekta (pravac)

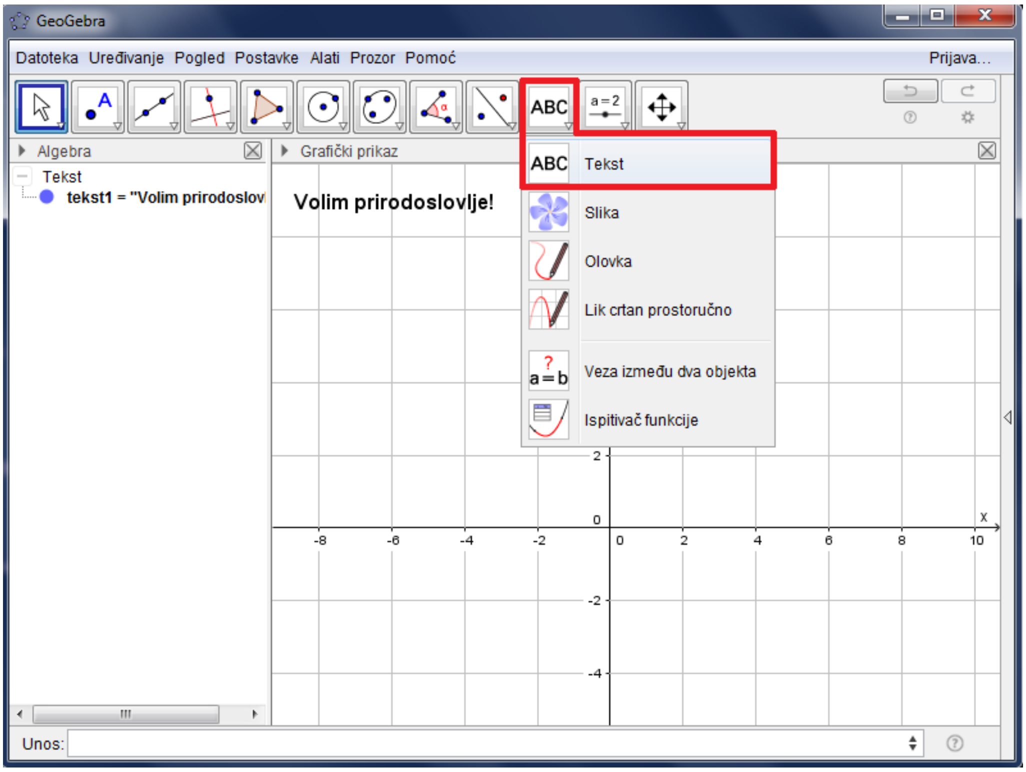


Slika 1.23. Uključen trag

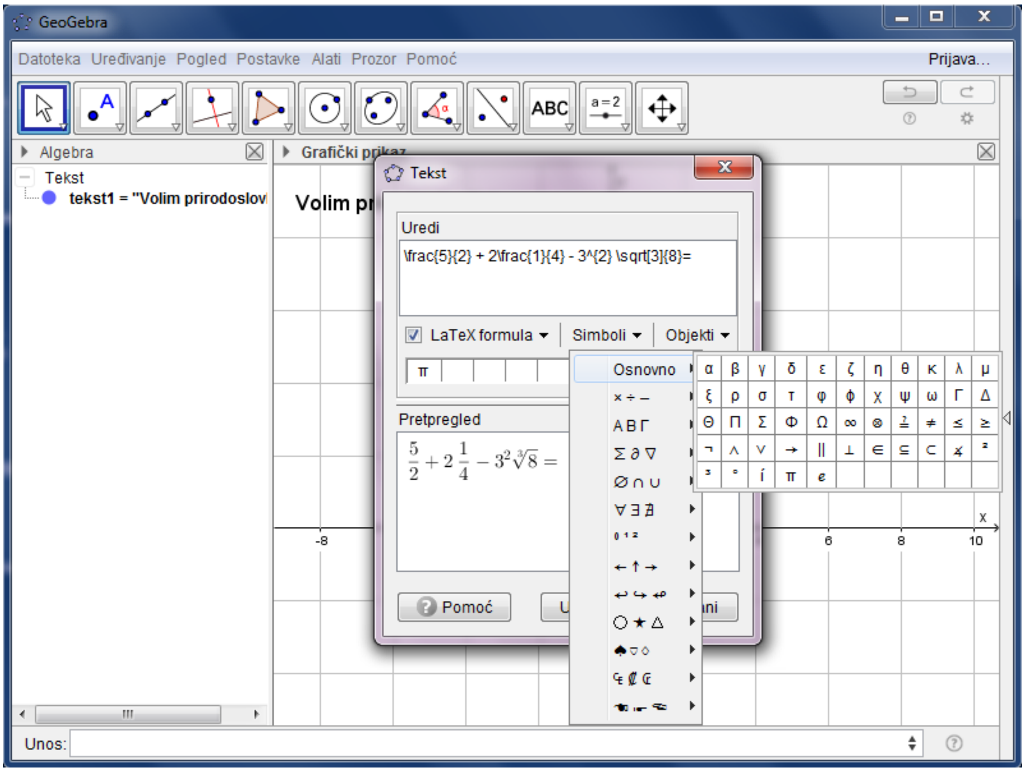
Na slici 1.23. uključen je trag za stranicu c trokuta ABC. Mišem povlačimo stranicu c i dobijemo ovakav oblik. U sredini se vidi kako je trokut izvorno izgledao, tu je ostao njegov trag. Ovo je samo jedan primjer korištenja traga.
Pokušajte samostalno: Pokušajte napraviti neki poseban oblik koristeći trag.

Umetanje teksta

Svaki objekt koji grafički prikazujemo ima inicijalni naziv koji mu dodijeli sam program, no nekad imamo potrebu dodati još nekakav tekst u koordinatnom sustavu, na primjer: tekst zadatka, naslov, uputu...
Na slici 1.24. crvenim je označeno umetanje teksta. Nakon odabira opcije Tekst i mjesta gdje će se tekst nalaziti (lijevim klikom miša) otvara se dijaloški okvir u kojem upisujemo tekst koji želimo prikazati. Osim samog teksta vidimo da možemo pisati i formule koristeći LaTeX sintaksu (odabirom opcije LaTeX formula). Ukoliko do sada niste upoznati s LaTeX-om, ne trebate se osjećati obeshrabljeno jer odabirom strelice desno kod opcije LaTeX formula otvara se padajući izbornik s formulama podijeljenim u neke smislene cjeline. Korisnik odabire formulu koja mu je potrebna i mijenja parametre te umeće formulu. Osim toga desno su različiti simboli koji se često koriste u matematičkim zapisima, a također je moguće unutar teksta umetnuti objekt koji je već kreiran te se tako pozivati na postojeće objekte pri rješavanju nekog problema. (Slika 1.25.)
Danas se većina matematičkih udžbenika, priručnika, časopisa piše u LaTeX-u, također se i web aplikacije okreću tome, stoga smatramo da će i vama biti korisno vidjeti kako izgleda LaTeX sintaksa u kojoj nastaju matematičke formule ugodne oku.



Slika 1.24. Umetanje teksta

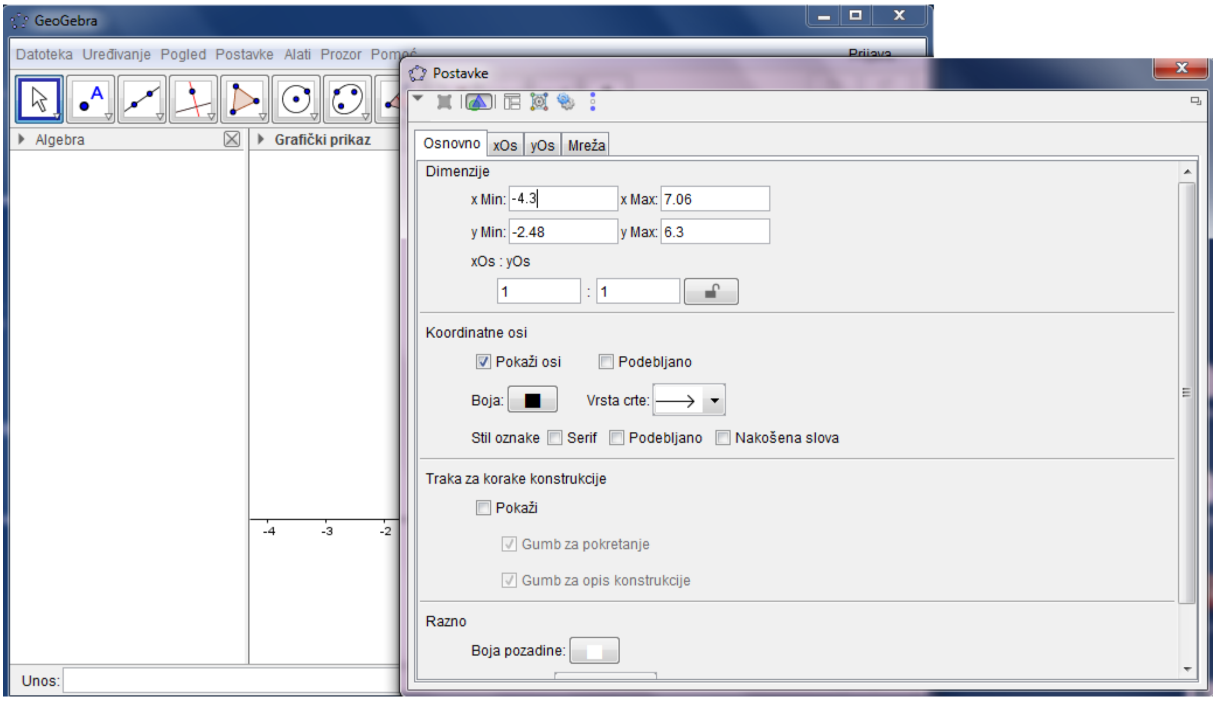


Slika 1.25. Umetanje LaTeX formule

Iz primjera je vidljivo da se napisani tekst također prikazuje lijevo u dijelu Algebra što znači da je i tekst nekakav objekt koji možemo uređivati. Kao i sve ostalo desnim klikom miša otvaramo Svojstva objekta i tamo uredimo veličinu, boju i ostala svojstva teksta kako želimo. Na taj način također mijenjamo tekst.

Koordinatni sustav

Osim uređivanja nacrtanih objekata možemo prilagoditi koordinatni sustav potrebama zadatka. Kad se pokrene GeoGebra, koordinatne osi nisu označene. Desnim klikom miša u koordinatnom sustavu otvara se padajući izbornik u kojem treba odabrati opciju Grafički prikaz. Otvara se dijaloški okvir Postavke u kojem možemo urediti koordinatni sustav. (Slika 1.26.) Posebno se uređuju osi, njihova boja, debljina, stil. Za označavanje koordinatnih osi odabiremo karticu xOs ili yOs, ovisno koju os želimo označiti. U ovom dijelu možemo odabrati prikaz samo pozitivnog smjera jedne ili obje osi, maksimalnu/minimalnu vrijednost na obje osi, boju pozadine, prilagodbu mreže…

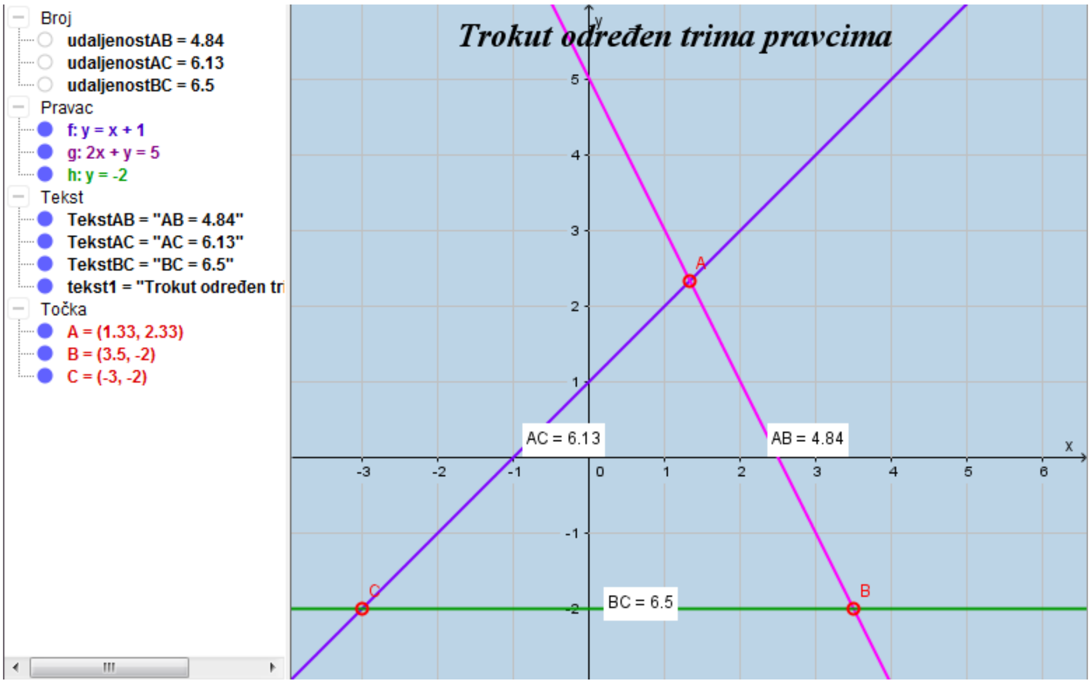


Slika 1.26. Prilagodba koordinatnog sustava

Zadatak 1.3. Nacrtajte trokut kojeg omeđuju pravci $y = x + 1, 2x + y - 5 = 0, y + 2 = 0$.

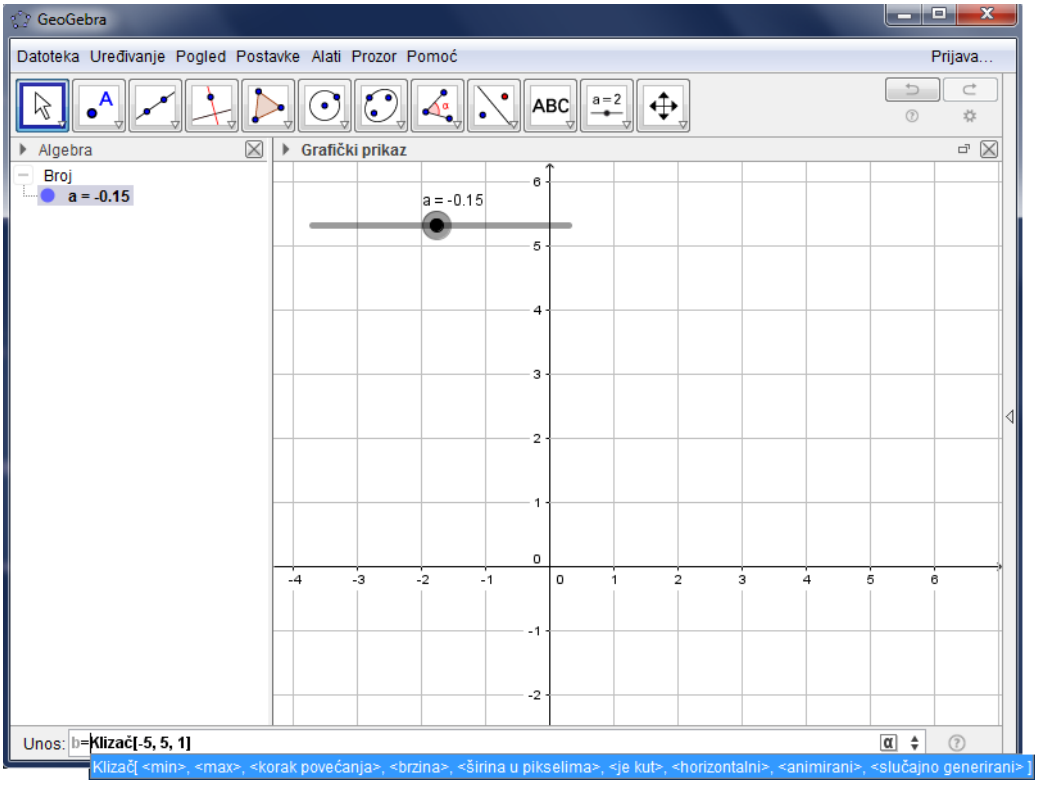
a) Označite vrhove trokuta slovima A, B, C.
b) Označite koordinatne osi: x os sa x, y os sa y.
c) Sakrijte oznake pravaca.
d) Uključite koordinatnu mrežu.
e) Debljina crte pravaca treba biti 4.
f) Promijenite boju pravaca. Neka su svi pravci različite boje.
g) Vrhovi trokuta neka budu označeni veličinom 4, praznim kružićem, crvenom bojom.
h) Odredite duljine stranica trokuta.
i) Neka boja pozadine bude Akvamarin 188, 212, 230.
j) Umetnite naslov: „Trokut određen trima pravcima“. Neka veličina slova bude Velika, font Serif, boja Crna 0, 0, 0, podebljana i nagnuta slova.

Rješenje:



Slika 1.27. Rješenje zadatka 1.3.

Klizači



Slika 1.28. Klizači

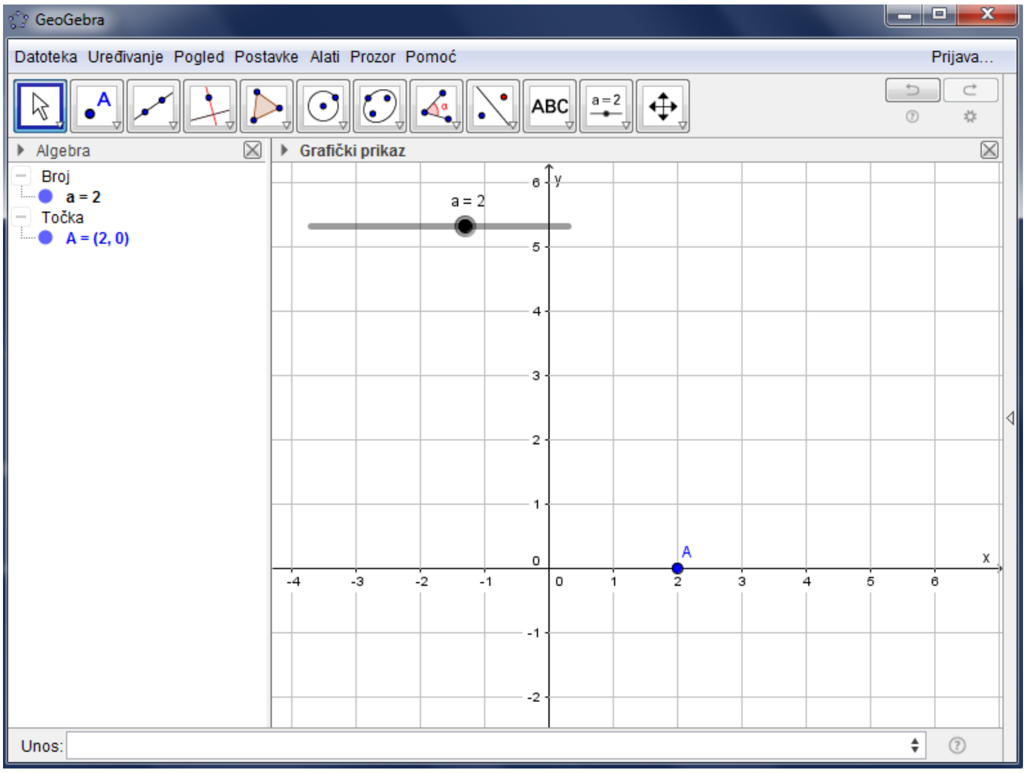
Na slici 1.28. prikazan je jedan umetnut klizač i drugi u tijeku umetanja. Prvi klizač a umetnut je jednostavnim načinom: upisom $a = -0.15$ u traku za unos i pritiskom tipke Enter na tipkovnici. Pomicanjem kruga na klizaču mijenja se njegova vrijednost. Klizač je inicijalno racionalan broj između -5 i 5. U traci za unos vidi se drugi način definiranja klizača: upisivanjem $b = \text{Klizač}\ [-5{,}5{,}1]$ pri čemu je b naziv klizača, a ostalo je definirano u naredbi Klizač. Zaključujemo da će klizač b biti cijeli broj (jer je korak povećanja jednak 1) iz intervala $[-5{,}5]$.
Desnim klikom na klizač bilo u dijelu Algebra ili na sam klizač u koordinatnom sustavu otvara se padajući izbornik u kojem prilagođavamo klizač. Slično kao kod svih objekata klizaču možemo mijenjati boju, naziv, oznaku, no također i maksimalnu i minimalnu vrijednost te korak povećanja.

Primjer: *Nacrtaj točku $A(a, 0)$ pri čemu je $a \in [-10, 10]$. Koristi klizač.*

Postupak je sljedeći:

1. Definiramo klizač a. Najbrže je u jednom koraku preko trake za unos upisati:
$$a = Klizač\ [-10{,}10].$$
2. Definiramo točku A. Upišemo u traku za unos:
$$A = (a, 0).$$

Mijenjajući vrijednost klizača a točka A pomiče se po x osi. (Slika 1.29.)



Slika 1.29. Koordinata točke zadana preko klizača

Pokušajte samostalno: Nacrtajte točku kojoj su obje koordinate zadane preko klizača.

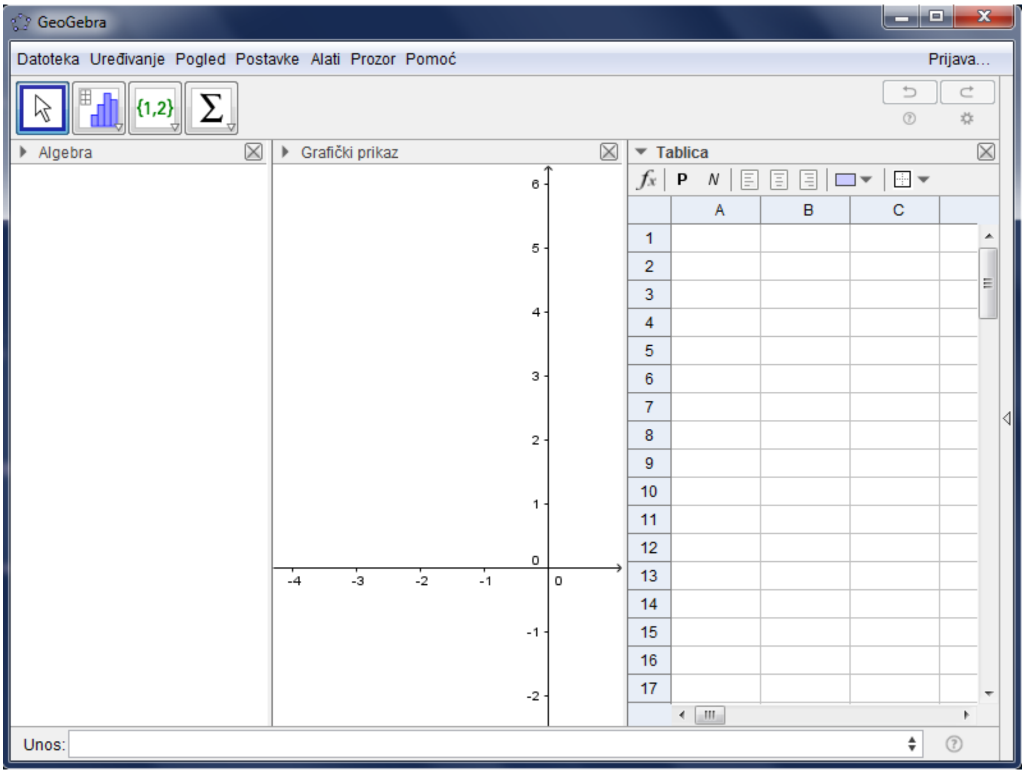
Na ovakav način mogu se crtati pravci, kružnice, mnogokuti…
Vrijednost klizača vidjet ćete koristeći GeoGebra aplete koji su dinamički, a to se postiže jednim dijelom klizačima. U njima možete mijenjati vrijednost varijabli na vrlo jednostavan način i tako uočavati promjene koje se događaju na grafovima, a iz toga će uslijediti razumijevanje mnogih svojstava grafova funkcija i funkcija samih.

Tablica

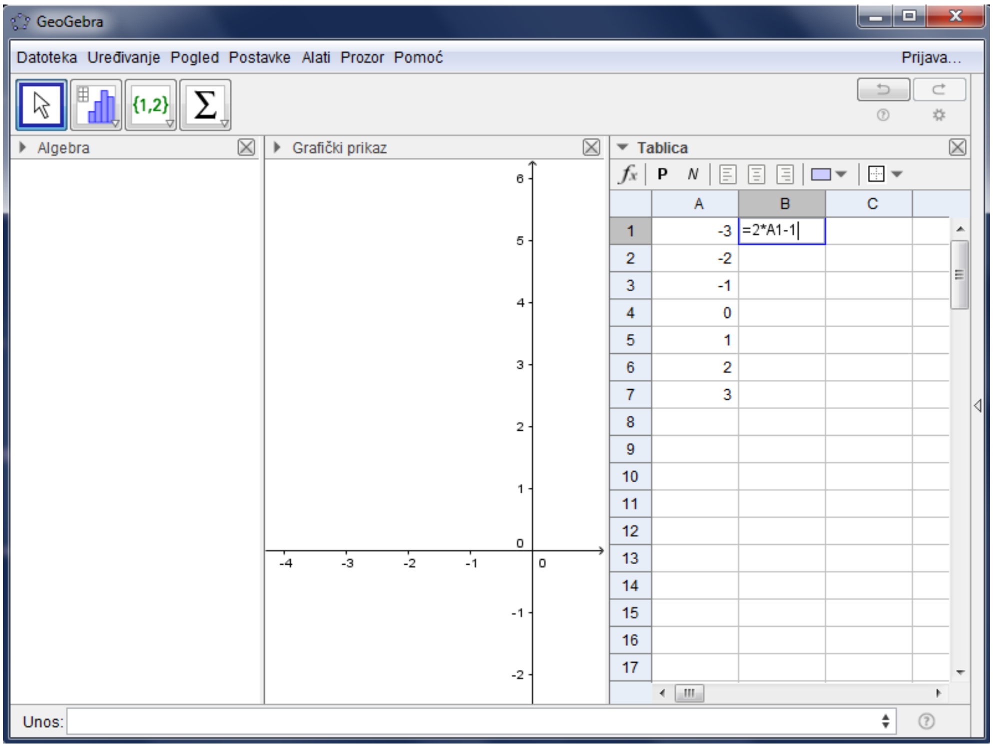
Budući da ćete tijekom pohađanja ovog fakultativnog predmeta obrađivati podatke dobivene eksperimentom, trebat će vam jedan poseban dio GeoGebre Tablica. Logično je da se podaci dobiveni eksperimentom zapisuju u tablicu i tako je uobičajeno. Naučit ćete obrađivati podatke u GeoGebri, crtati grafove iz tablica i dobivati podatke koji su vam potrebni vrlo brzo.

Dio Tablica pokreće se slično kao Algebra: otvaranjem izbornika Pogled i odabirom opcije Tablica. Taj dio otvara se s desne strane. (Slika 1.30.)

Neke osnovne mogućnosti rada s tablicama ćemo pokazati na primjeru formule $B = 2A - 1$. Treba naglasiti da ne treba svaku vrijednost računati, već se može napisati formula za prvu zadanu vrijednost i povlačenjem dolje, formula se kopira za ostale retke. (Slika 1.31.)

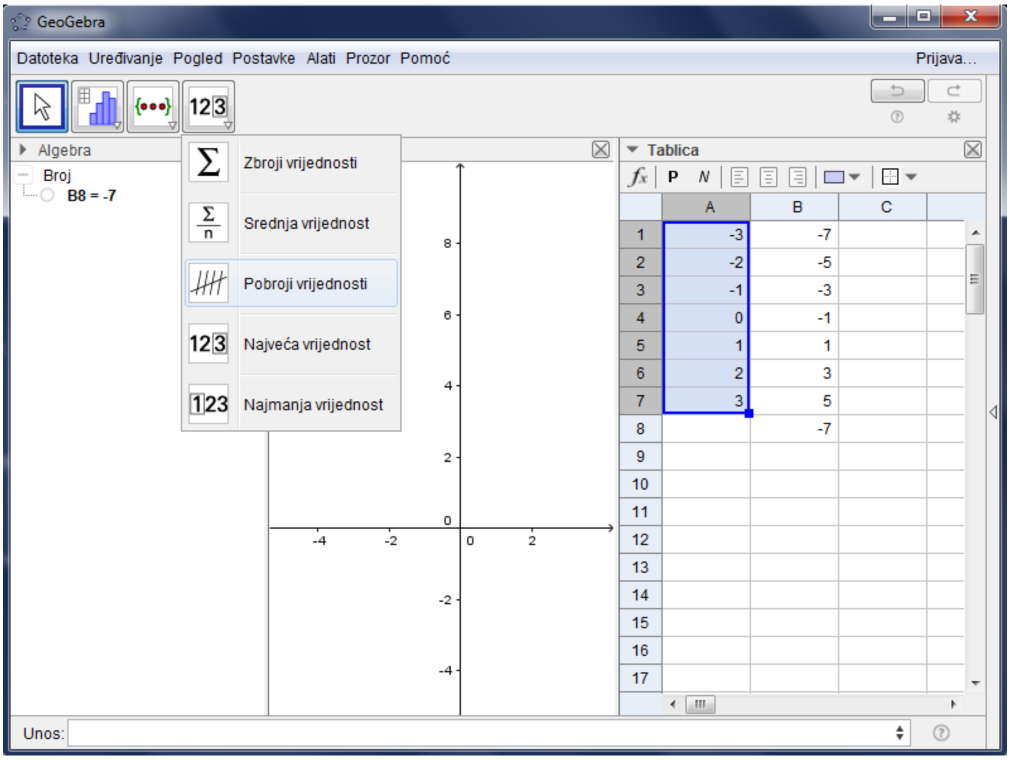


Slika 1.30. Tablica



Slika 1.31. Tablica

Više je mogućnosti za analizu podataka. Za početak podatke s kojima trenutno radimo treba označiti, a zatim birati opciju koja nam je potrebna. Na slici 1.32. prikazane su neke osnovne naredbe koje možemo provesti za obradu podataka, na primjer: prebrojiti ih, zbrojiti ih, odrediti najveću/najmanju vrijednost, srednju vrijednost. Rezultat operacije prikaže se u tablici ispod podataka koji su obrađivani (ćelija $B8$), a također je prikazan kao objekt u dijelu Algebra.



Slika 1.32. Obrada podataka u tablici

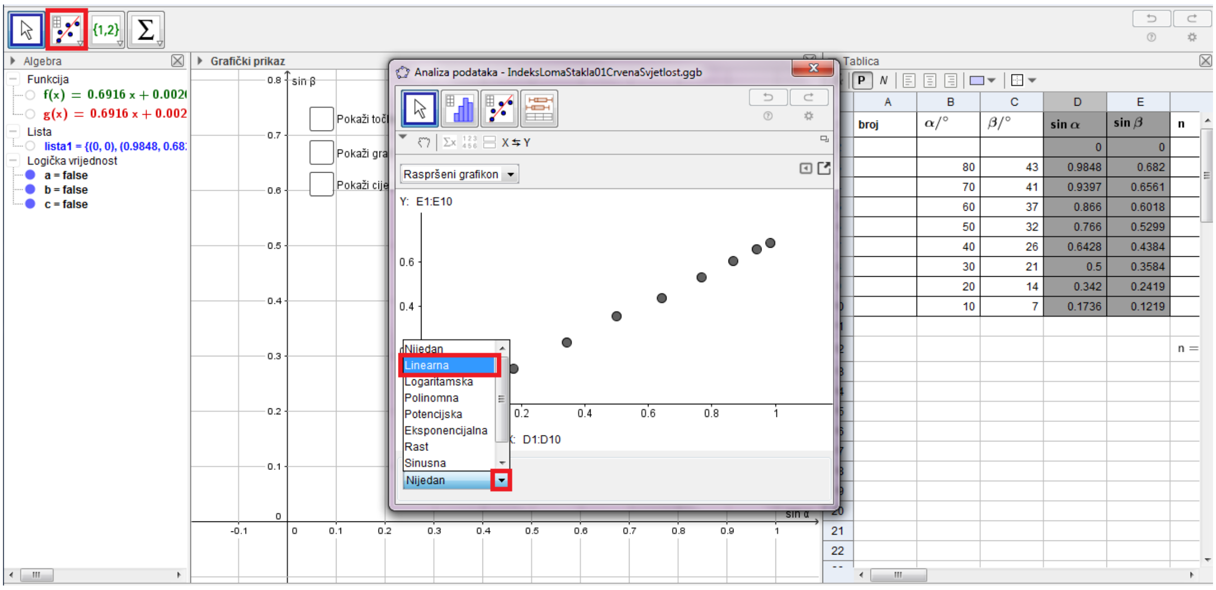
Dvovarijabilna regresijska analiza

Nužno je za ovaj predmet naučiti crtati grafove linearnih funkcija preko tablice u GeoGebri. Za taj postupak važno je znati koji stupac u tablici prikazuje varijablu, a koji vrijednosti funkcije koja opisuje podatke.

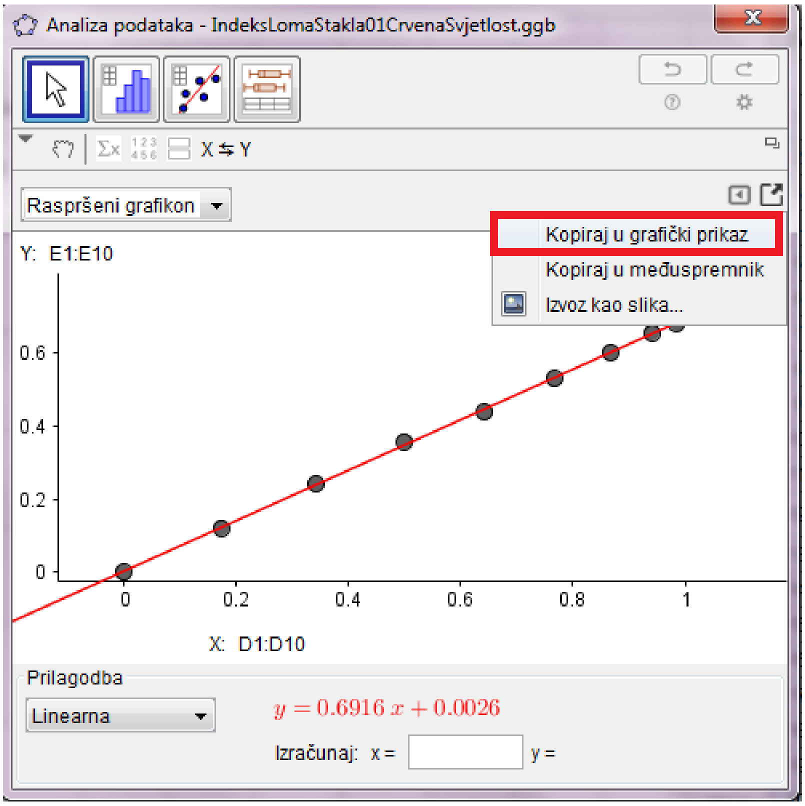
Crtanje se vrši na sljedeći način:

- Označavanje stupca koji sadrži podatke koji ovise o nekoj varijabli,
- Označavanje stupca koji sadrži podatke o varijabli (na primjer vrijeme kod v-t grafa),
- Odabir opcije Dvovarijabilna regresijska analiza,
- Odabir opcije Linearna. (Slika 1.33.)

Nakon odabira ove opcije crta se pravac i prikazuje zapis linearne funkcije. Može se izračunati vrijednost funkcije za bilo koji x. (Slika 1.34.)



Slika 1.33. Crtanje grafa iz podataka u tablici



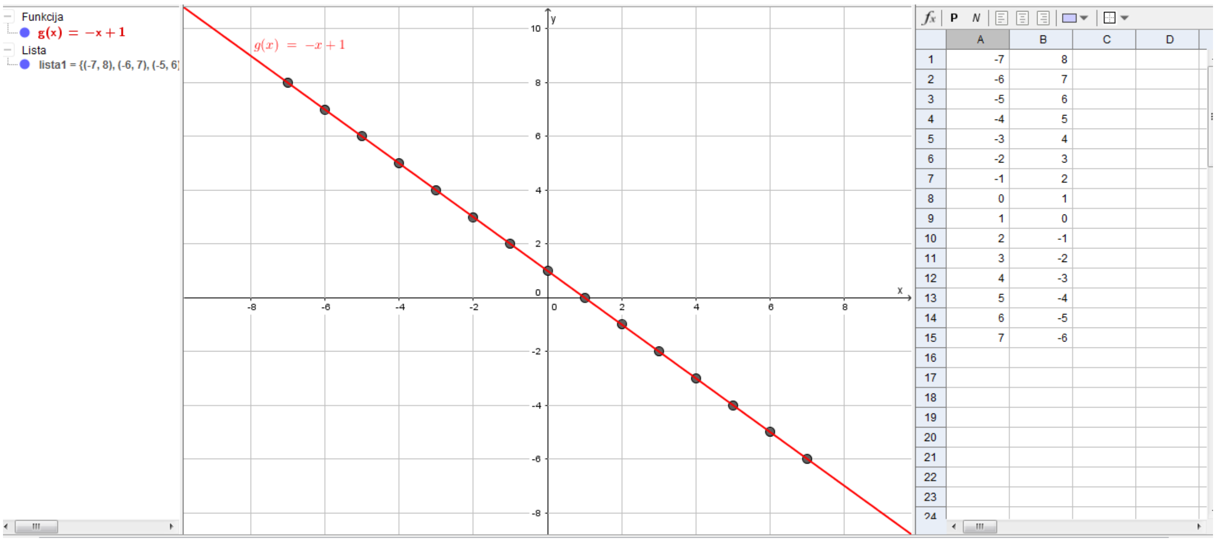
Slika 1.34. Linearna funkcija dobivena analizom podataka iz tablice

Opcija označena crvenim Kopiraj u grafički prikaz prebacuje pravac i točke u glavni prozor GeoGebre.

Zadatak 1.4. Neka je jednadžba pravca $y = -x + 1$.

a) U prvi stupac tablice upiši brojeve od -7 do 7.
b) U drugom stupcu ispiši vrijednosti y koordinata točaka koje leže na tom pravcu.
c) Nacrtaj taj pravac preko točaka iz tablice.
d) Označi ga njegovim nazivom i jednadžbom. Što primjećuješ? Je li to jednadžba pravca na slici ista ovoj zadanoj u zadatku?

Rješenje:



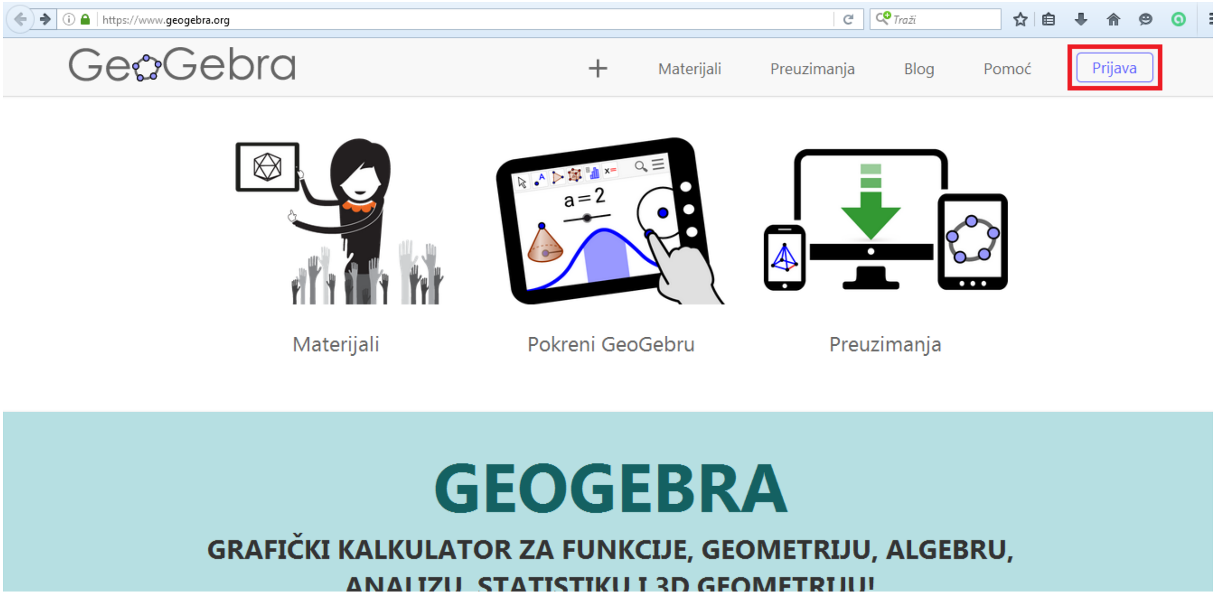
Slika 1.35. Rješenje zadatka 1.4.

GeoGebra online

Svaki učenik može se besplatno registrirati na službeni GeoGebra portal gdje se nalazi mnoštvo gotovih GeoGebra datoteka koje se mogu koristiti. Na tom portalu bit će pohranjeni materijali ovog fakultativnog predmeta i oni će biti dostupni nastavnicima i učenicima koji se prijave u sustav, a također će ti materijali biti pohranjeni na Moodleu.

Na slikama 1.36. i 1.37. može se vidjeti način prijavljivanja na GeoGebra portal.

Nakon prijave korisnik ima pravo pristupiti mnoštvu materijala koji su javno postavljeni te može postavljati svoje materijale potpuno besplatno.



Slika 1.36. Geogebra online

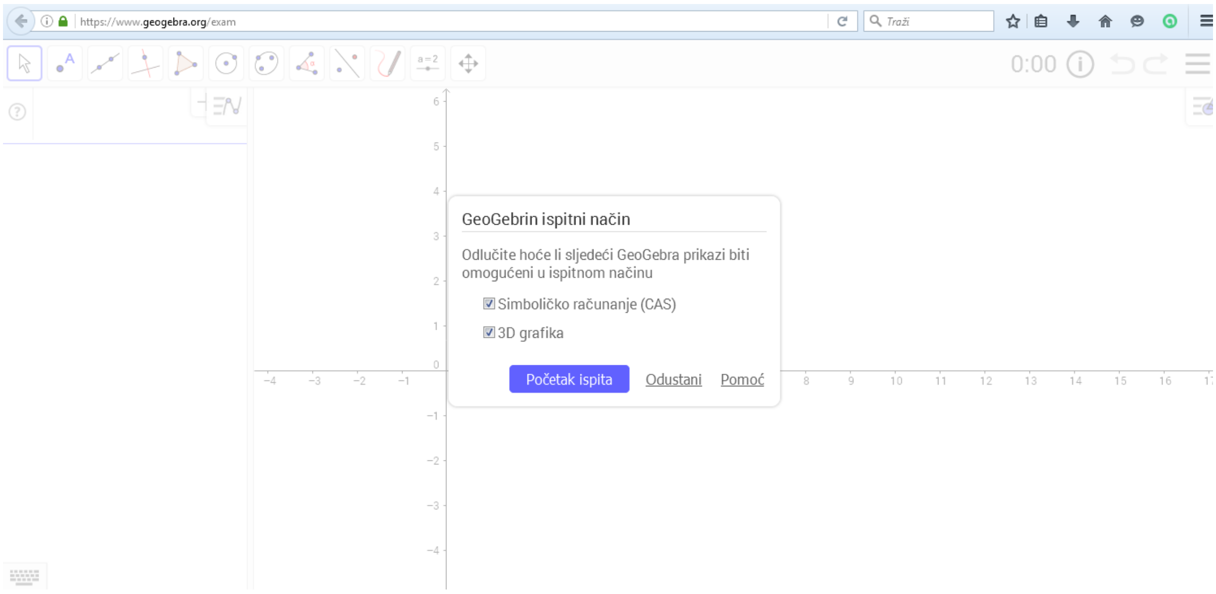
Slika 1.37. Geogebra online – prijava

GeoGebra na pametnom telefonu

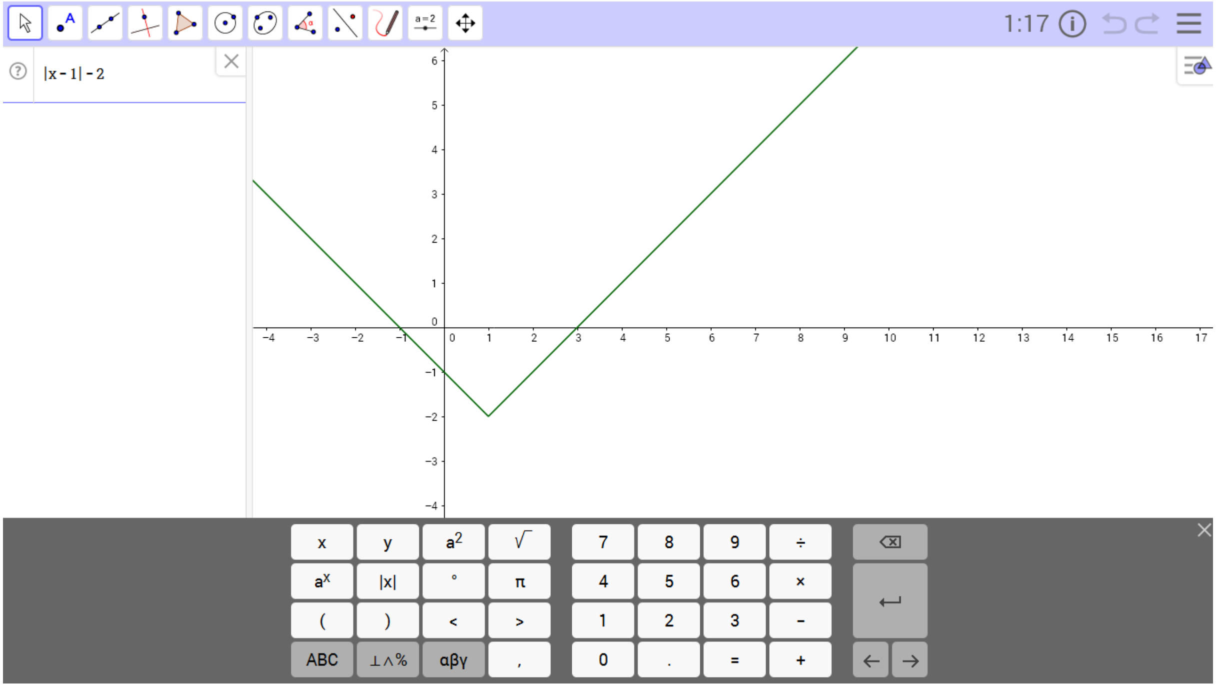
GeoGebru možete koristiti i na svom pametnom telefonu, no za sada samo na sustavu Android. Isprobajte GeoGebru na pametnom telefonu i vidite koje opcije su tamo dostupne.

Ispitni način u GeoGebri

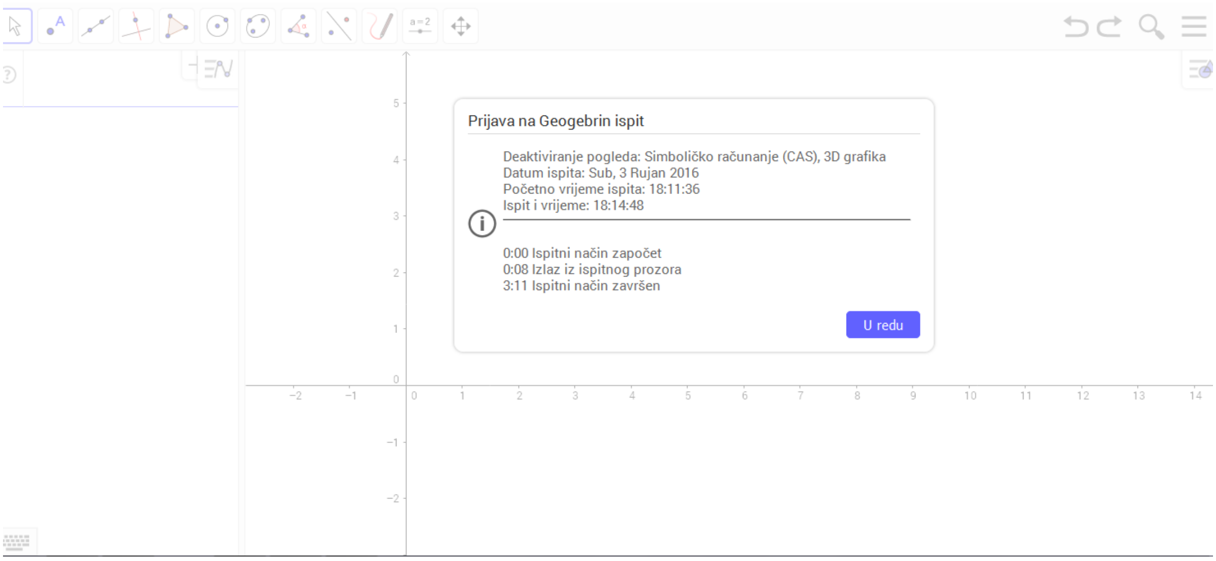
Nedavno je razvijeno nešto novo u GeoGebri: ispitni način. Ideja je učenicima omogućiti korištenje GeoGebre prilikom pisanja ispita na papiru. Realizirano je tako da učenici otvore web stranicu www.geogebra.org/exam i odaberu Ispitni način. (Slika 1.38.) Otvara im se GeoGebra preko cijelog ekrana. (Slika 1.39.*)* Učenik može zatvoriti cijeli ekran, no sustav to pamti. Kada učenik završi s ispitnim načinom, dobije sve podatke o ispitu: kada je započeo pisanje, kada je isključio cijeli ekran, kada ga je ponovno uključio i to za svaki put, kada je završio ispit te pod kojim je uvjetima ispit pisan (koje su mu opcije bile zabranjene). (Slika 1.40.) Ispitni način znači korištenje GeoGebre pri pisanju ispita, no naglasak se stavlja na cijeli ekran upravo zbog toga da se spriječi korištenje ostalih alata na računalu te sam Internet i njegove mogućnosti.



Slika 1.38. Ispitni način – početak ispita

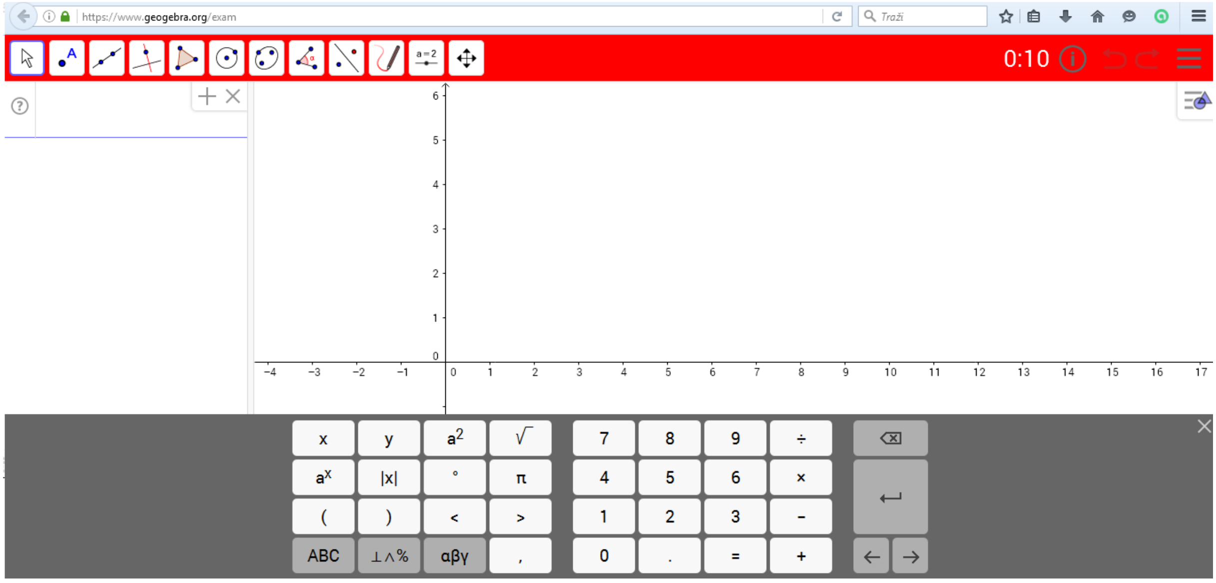


Slika 1.39. Ispitni način



Slika 1.40. Ispitni način – kraj ispita

Za ispitni način ne treba biti registriran na službenoj stranici GeoGebre. GeoGebrin ispitni način (GeoGebra Exam Mode) osmišljen je kao pomoć učenicima pri pisanju ispita, no ne dopuštajući korištenje drugih alata. Tijekom ispita nastavnik može pratiti ponašanje učenika pri korištenju ispitnog načina jer je on napravljen tako da je pri isključivanju cijelog ekrana jedan dio ekrana obojen crvenom bojom pa je vrlo uočljiv. (Slika 1.41.)



Slika 1.41. Ispitni način – upozorenje

Savjet: Pri vježbanju zadataka možete otvoriti Ispitni način i koristiti GeoGebru te si tako stvoriti okruženje kakvo imate na ispitu. Time možete provjeriti usvojenost nastavnih sadržaja i znati na čemu još morate poraditi da biste ostvarili svoj cilj u ovom fakultativnom predmetu.

2. LINEARNA FUNKCIJA

Funkcija $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ oblika $f(x) = kx + l$, gdje su $k, l \in \boldsymbol{R}, k \neq 0$, zove se ***linearna funkcija***. Graf linearne funkcije jest ***pravac***.

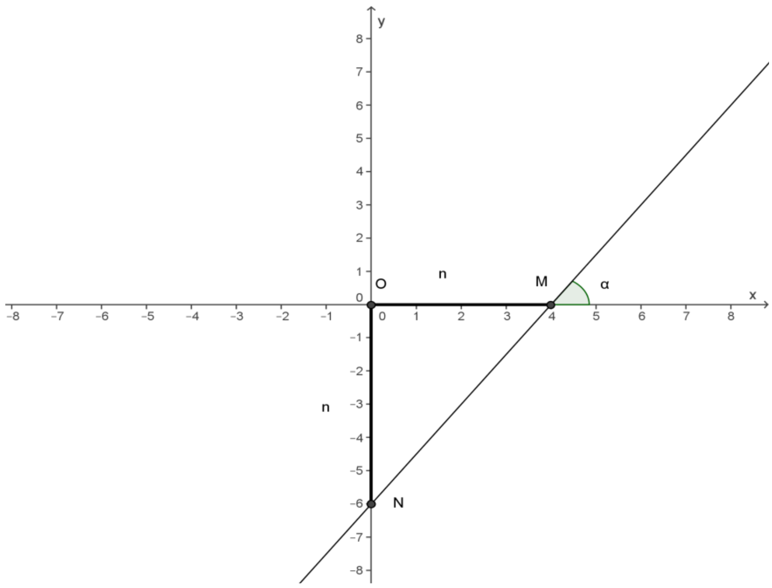
Jednadžbu oblika $p \ldots y = kx + l$ zovemo ***eksplicitni oblik*** *jednadžbe pravca.*

Pri tome je: $\boldsymbol{k}$ **– koeficijent smjera (nagib);**

$\boldsymbol{l}$ **– odsječak na osi** $\boldsymbol{y}$**.**

Ako je $k = 0$, funkcija $f(x) = l$ zove se ***konstanta*** ili ***konstantna funkcija*** i njezin je graf pravac paralelan s x osi, koji y os siječe u točki $\mathbf{N}\ (\mathbf{0}, \boldsymbol{l})$.

Jednadžbu oblika $p \ldots Ax + By + C = 0$ zovemo ***implicitni (opći) oblik*** *jednadžbe pravca* (to je linearna jednadžba s dvije nepoznanice, a skup je njenih rješenja pravac).

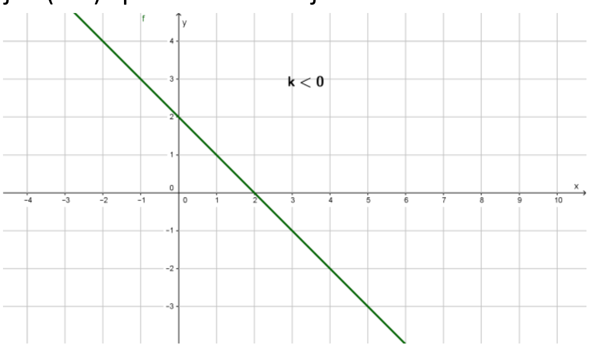


Slika 2.1. Pravac

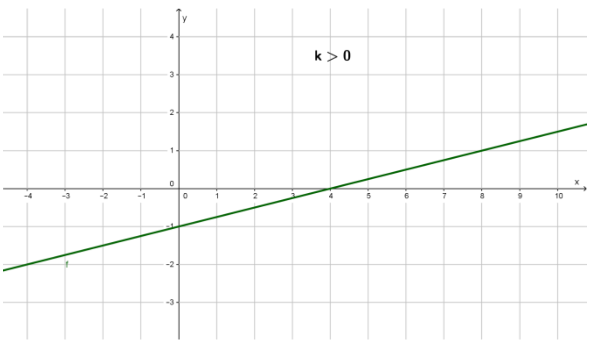
α – kut koji pravac $y = kx + l$ zatvara pozitivnim dijelom osi x , $\boldsymbol{k} = \mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha}$.

Točka $\mathbf{M}\ (\boldsymbol{m}, \mathbf{0})$ sjecište je pravca $y = kx + l$ s osi x, odnosno **nultočka** linearne funkcije $f(x) = kx + l$. Vrijedi $f(m) = 0$.

Tijek (tok) i predznak funkcije:



Slika 2.2. Padajuća linearna funkcija



Slika 2.3. Rastuća linearna funkcija

Što je $|k|$ veće, funkcija je strmija.

2.1. Primjeri

Napomena: Preporuča se sve primjere riješiti i u GeoGebri. Time ćete uvježbati crtanje u GeoGebri i naučiti koristiti različite mogućnosti koje ona nudi za jednostavnije rješavanje zadataka. Osim toga, na takav način možete provjeriti svoja rješenja.

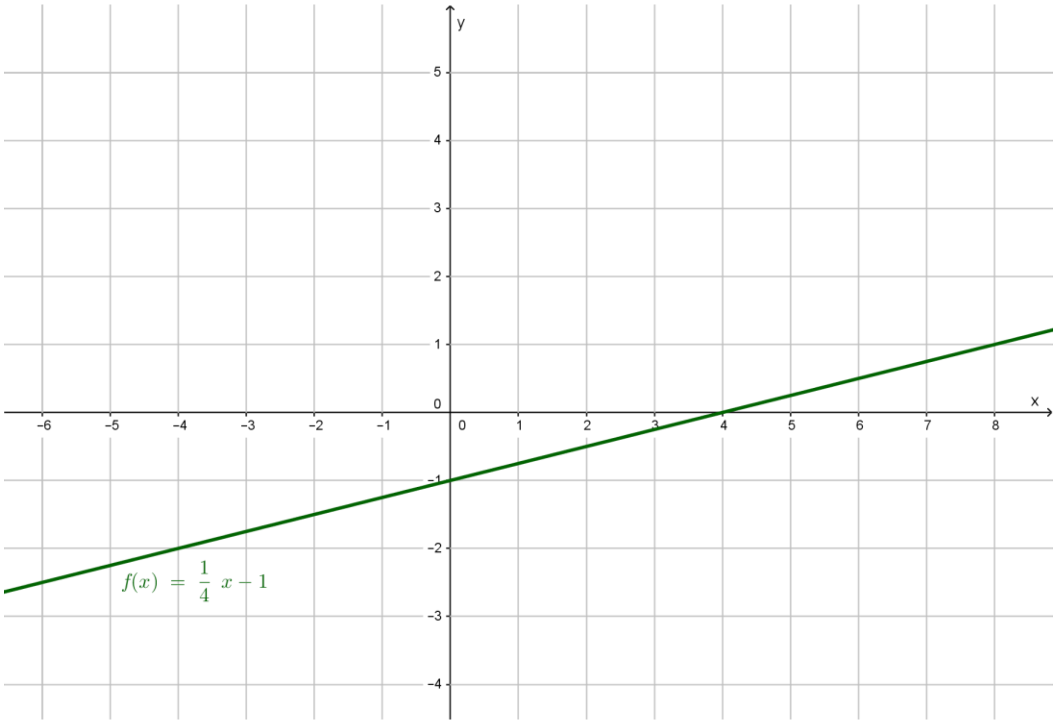
Primjer 1. $f(x) = \frac{1}{4}x - 1$

1) Nacrtajte graf funkcije,
2) Odredite nultočku,
3) Odredite sve realne brojeve za koje je $f(x) \leq 2$,
4) Provjerite točnost tvrdnje: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{1}{4}$ za realne brojeve
   a) $x_1 = 1,\ x_2 = 3$
   b) $x_1 = -3,\ x_2 = 0$
   c) $x_1 = -1.3,\ x_2 = 0.7$

5) Pokažite da tvrdnja $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{1}{4}$ vrijedi za sve realne brojeve x_1, x_2 .

Rješenja:

1)



Slika 2.4. Primjer 1.

2) Nultočka: riješiti jednadžbu

$$f(x_0) = 0$$
$$\frac{1}{4}x_0 - 1 = 0$$
$$x_0 = 4$$

3) Riješiti nejednadžbu $f(x) \leq 2$ po nepoznanici x:

$$\frac{1}{4}x - 1 \leq 2$$

$$x - 4 \leq 8$$
$$x \leq 12$$
$$x \in \langle -\infty, 12]$$

4) a) Uvrstiti: $x_1 = 1,\ x_2 = 3$

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot 3 - 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot 1 - 1\right)}{3 - 1} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

b) Uvrstiti: $\mathrm{x}_1 = -3,\ \mathrm{x}_2 = 0,$

c) Uvrstiti: $\mathrm{x}_1 = -1.3,\ \mathrm{x}_2 = 0.7$.

5) Uvrstiti: $f(x) = \frac{1}{4}x - 1;$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\left(\frac{1}{4}x_2 - 1\right) - \left(\frac{1}{4}x_1 - 1\right)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{4}(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{4}\ .$$

Primjer 2. $\mathrm{f(x)} = -\mathrm{x} + 3$

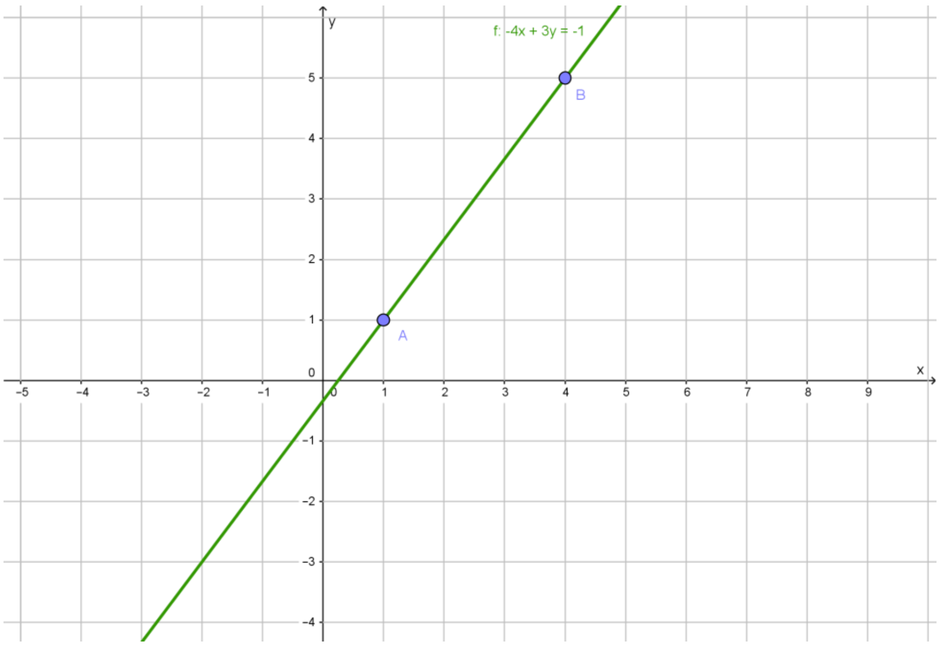
1) Nacrtajte graf funkcije,
2) Odredite nultočku,
3) Odredite sve realne brojeve za koje je $f(x) \leq 2$,
4) Provjeri točnost tvrdnje: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -1$, za realne brojeve x_1, x_2.
   a) $x_1 = 2,\ x_2 = 3$
   b) $x_1 = 0,\ x_2 = -1$
   c) $x_1 = 0.4,\ x_2 = 0.9$

5) Pokažite da tvrdnja $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -1$ vrijedi za sve realne brojeve x_1, x_2 .

Primjer 3. Zadane su točke $\mathrm{A}(1,1), \mathrm{B}(4,5)$.

Nacrtajte pravac koji prolazi kroz te dvije točke. Odredite njegov koeficijent smjera.

Rješenje:

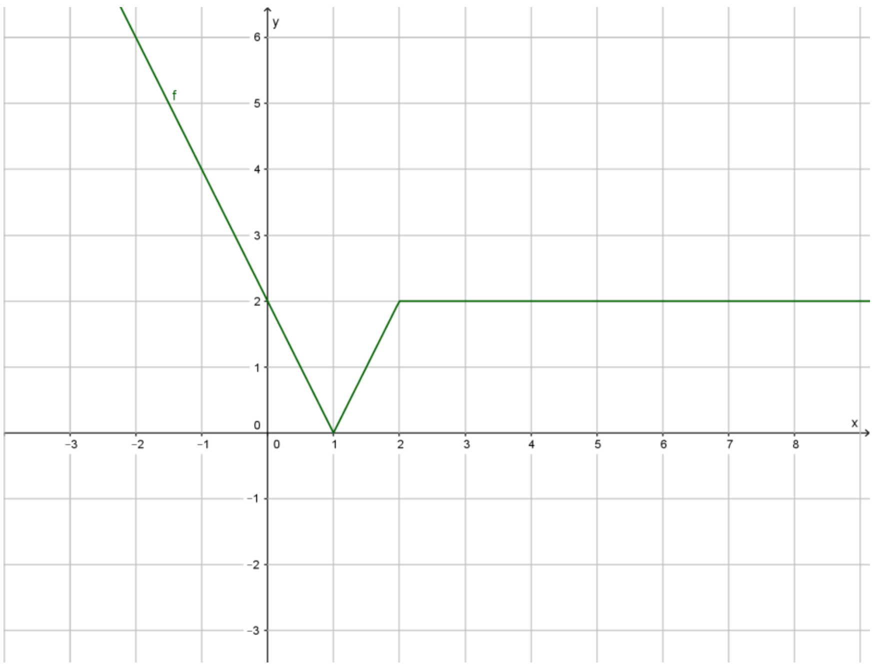


Slika 2.5. Primjer 3.

koeficijent smjera: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \mathrm{tg}\alpha$ => $k = \frac{4}{3}$

Primjer 4. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \begin{cases} -2x + 2, & x \leq 1 \\ 2x - 2, & 1 < x \leq 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$.

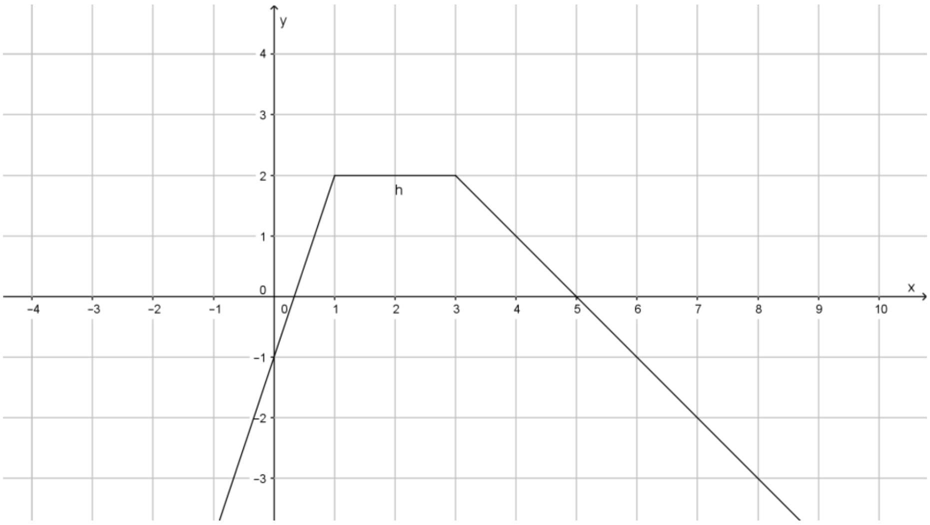
Rješenje:



Slika 2.6. Primjer 4.

Primjer 5. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0 \\ 3, & 0 < x \leq 2 \\ 3x-3, & x > 2 \end{cases}$.

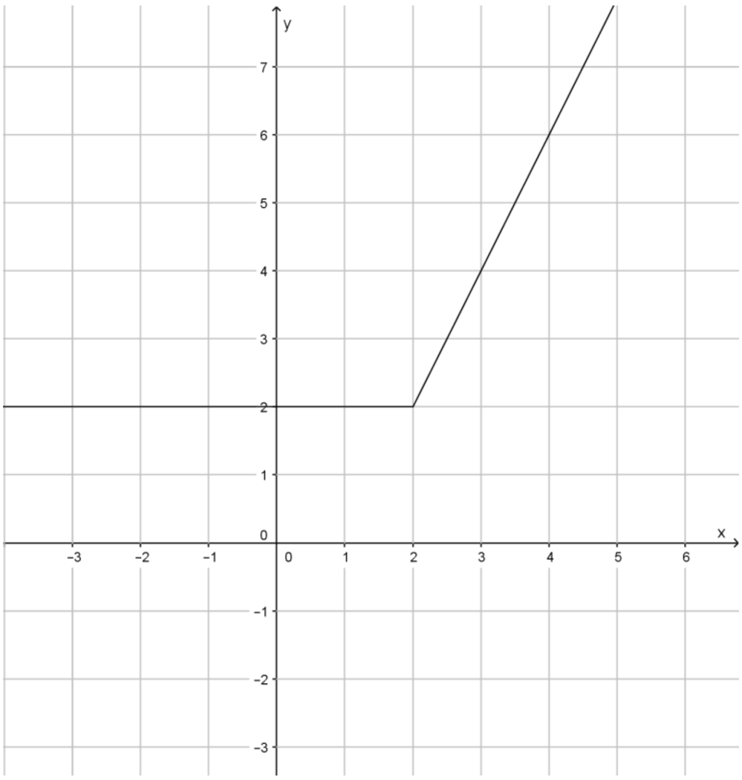
Primjer 6. Opišite tijek funkcije kojoj pripada graf:



Slika 2.7. Primjer 6.

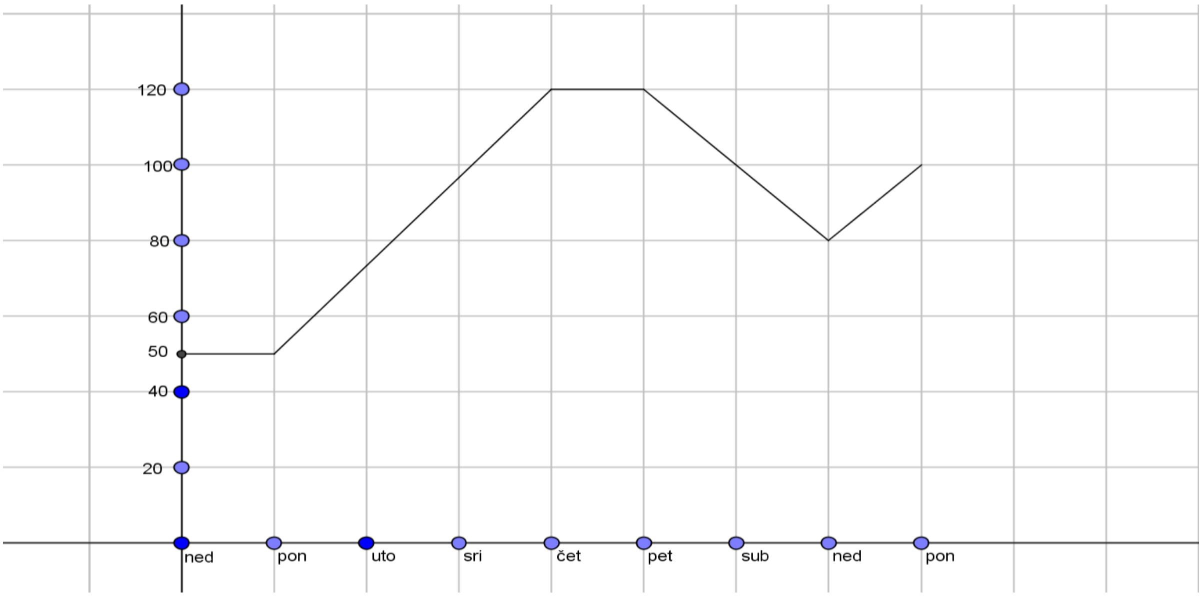
Rješenje: $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \leq 3 \\ -x+5, & x > 3 \end{cases}$

Primjer 7. Opišite tijek funkcije kojoj pripada graf:



Slika 2.8. Primjer 7.

Primjer 8. U Kirchbergu su tijekom jednog tjedna svaki dan u 6 h mjerili visinu snijega. Rezultati mjerenja iskazani su grafom:

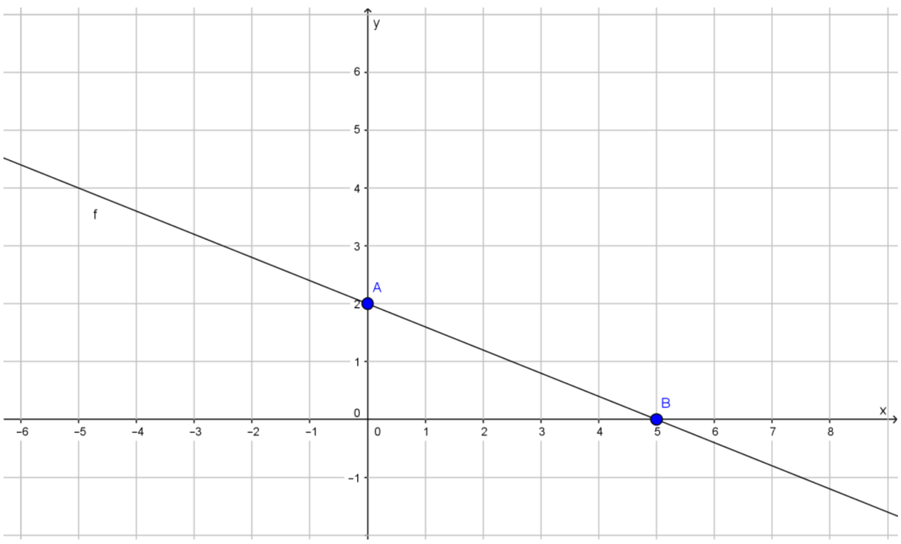


Slika 2.9. Primjer 8.

1) Kolika je visina snijega izmjerena u nedjelju?
2) Kada je prvi put izmjerena visina snijega od 120 cm?
3) Visina snijega rasla je tijekom mjerenja u dvama periodima. Koliko je ukupno snijega napadalo u tim periodima?

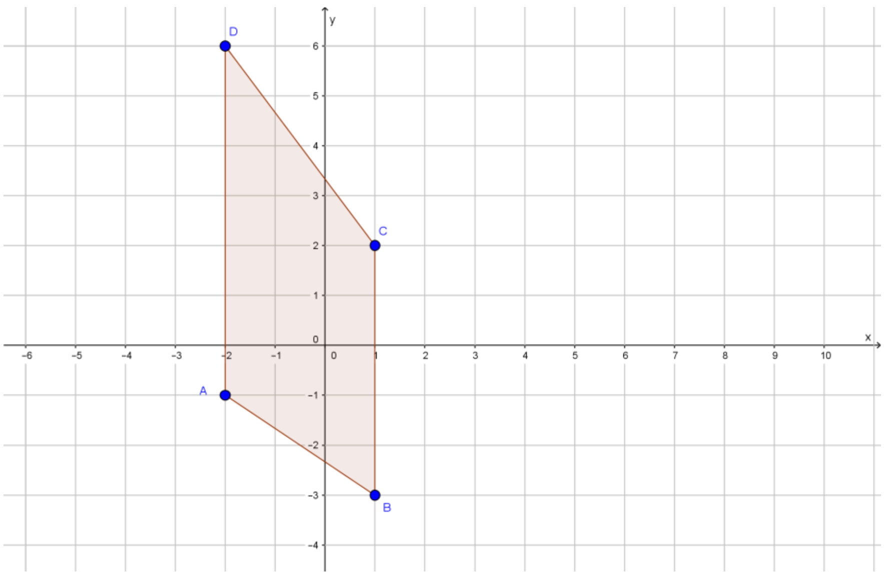
2.2. Zadaci za vježbu

1. Odredite jednadžbu pravca prikazanog na slici:



Slika 2.10. Zadatak 1.

2. Nacrtajte pravac $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Odredite koeficijente k i l i nultočku x_0 .
3. Odredite koeficijent smjera pravca $3x + 4y - 12 = 0$. Nacrtajte sliku!
4. Odredite nultočku pravca $3x + 4y - 6 = 0$. Odredite raste li pravac ili pada.
5. Nacrtajte grafove funkcija $x = -2$ i $y = 4$.
6. Odredite linearnu funkciju čiji je graf pravac koji prolazi točkom $(2,3)$ i ima koeficijent smjera $-\frac{1}{2}$. Nacrtajte.
7. Zadana je funkcija $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$. Nacrtajte graf i izračunajte koliko se promijeni vrijednost funkcije ako se vrijednost varijable poveća s -3 na 4.
8. Na slici je četverokut $ABCD$. Kolika je mjera kuta kod vrha B?



Slika 2.11. Zadatak 8.

9. Luka je odlučio putovati biciklom. Za najam bicikla platio je 50 kuna te za svaku minutu vožnje još po 20 lipa.
    a) Odredite funkciju kojom možemo opisati cijenu C najma bicikla na vrijeme od t minuta.
    b) Koliko je novaca Luka morao izdvojiti ako je bicikl vratio za 2 sata?
    c) Koliko dugo može voziti bicikl da bi račun iznosio 100 kuna?

10. Formulom $T(t) = -1.2t + 21$ prikazana je veza temperature u zamrzivaču i vremena koje je proteklo od njegovog uključenja. Pri tome je T temperatura iskazana u °C, a vrijeme t u minutama.
    a) Kolika je temperatura u zamrzivaču jedan sat nakon uključenja?
    b) Nakon koliko je minuta od uključenja temperatura u zamrzivaču pala na 0 °C?

3. VEKTORI

3.1. Osnovni pojmovi o vektorima

Neke veličine određene su samo svojim iznosom. Njih još nazivamo ***skalarima*** (npr. udaljenost, površina, rad, masa…). Veličine koje su određene svojim iznosom, smjerom i orijentacijom zovemo ***vektorima*** (npr. brzina, sila akceleracija…). Vektore obično predstavljamo usmjerenim dužinama. ***Usmjerena dužina*** jest dužina koja ima početak (hvatište) i kraj. Vektore označavamo malim slovima ($\vec{a}, \vec{b}$…) ili navođenjem početne i završne točke ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OT}$ …) uz dodatak strelice.

Iznos ili duljina vektora $\vec{a}$ udaljenost je njegove početne i završne točke i označava se sa $|\vec{a}|$.

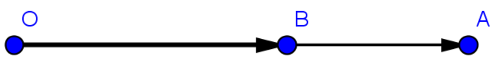
Vektor duljine 0 naziva se ***nul-vektor*** i označava s $\vec{0}$.

Smjer vektora jest smjer pravca na kojem vektor leži.

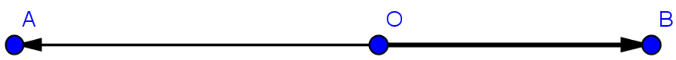
Vektori su ***istog smjera*** ili ***kolinearni*** ako leže na istom ili na paralelnim pravcima.

Kolinearni vektori mogu biti ***jednake*** i ***suprotne*** orijentacije.

Vektori $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ jednake su orijentacije ako se polupravci OA i OB podudaraju (kažemo da se točke A i B nalaze „s iste strane“ točke O). Inače su suprotne orijentacije.



Slika 3.1. Vektori jednake orijentacije



Slika 3.2. Vektori suprotne orijentacije

Kolinearne vektore jednakih duljina i suprotne orijentacije zovemo ***suprotnim vektorima*** i označavamo s $\vec{a}$ i $-\vec{a}$.

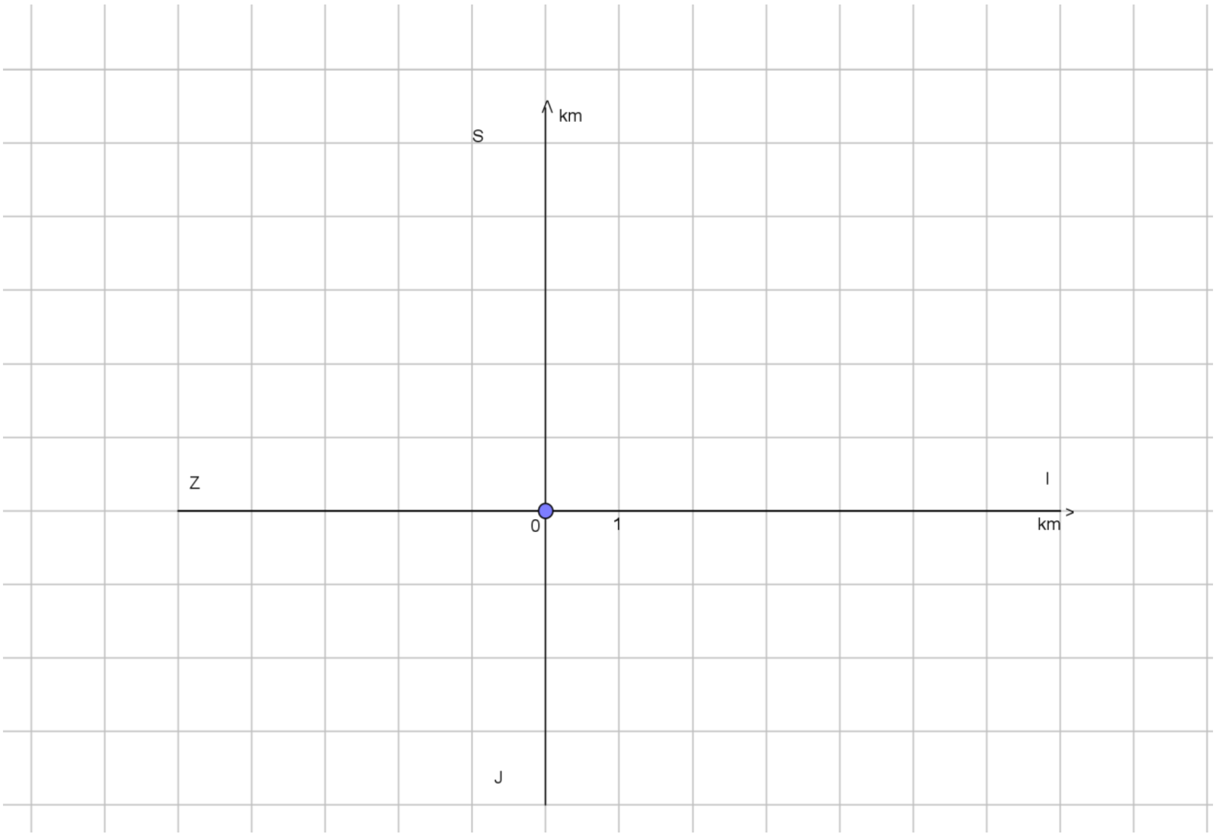
Dva su vektora ***jednaka*** ako imaju isti iznos, kolinearni su i jednako su orijentirani.

Uvjet jednakosti vektora možemo izreći i ovako:

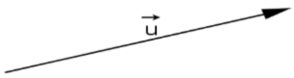
> Vektori $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ jesu jednaki (pišemo $\vec{a} = \vec{b}$) ako je četverokut ABDC paralelogram.

Za kolinearne vektore u ravnini kažemo još i da su ***linearno zavisni vektori***. U protivnom vektori su ***linearno nezavisni***.

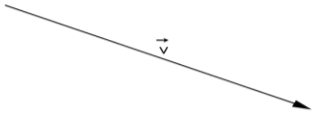
Primjer 1. Prikažite grafički put kretanja čovjeka koji hoda 2 km prema zapadu, potom 3 km prema sjeveru i onda 2 km prema jugoistoku (početak kretanja smještamo u ishodište koordinatnog sustava).



Primjer 2. Nacrtajte četiri vektora različitih duljina koji su kolinearni s vektorom $\vec{u}$:

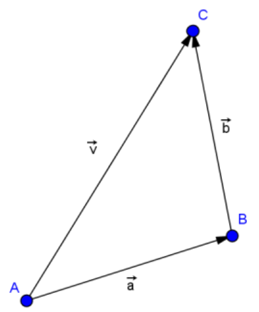


Primjer 3. Nacrtajte dva vektora suprotna vektoru $\vec{v}$:



3.2. Računske operacije s vektorima

3.2.1. Zbrajanje vektora po pravilu trokuta

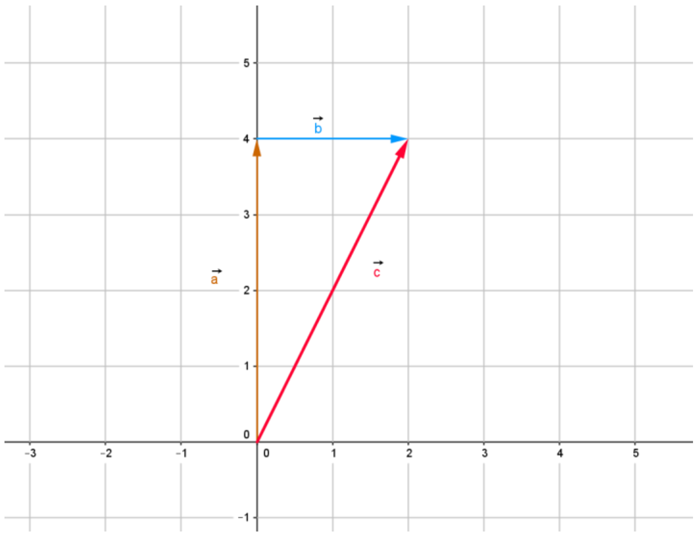


$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Slika 3.3. Zbrajanje vektora po pravilu trokuta

Primjer:

Marko je čamcem trebao prijeći preko rijeke. Prikažite grafički put čamca ako je njegova brzina 4 m/s, a brzina rijeke je 2 m/s. Kolika je brzina čamca s obzirom na promatrača s obale?



Slika 3.4. Zbrajanje vektora – primjer

$|\vec{a}|$ - brzina čamca

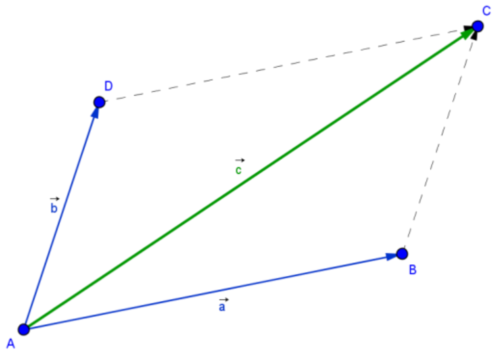
$|\vec{b}|$ - brzina rijeke

$|\vec{c}|$ - brzina čamca u odnosu na promatrača

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ rezultantni vektor

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$
$$|\vec{c}|^2 = 4^2 + 2^2$$
$$|\vec{c}|^2 = 20$$
$$|\vec{c}| = 2\sqrt{5}\ m/s$$

3.2.2. Zbrajanje vektora po pravilu paralelograma



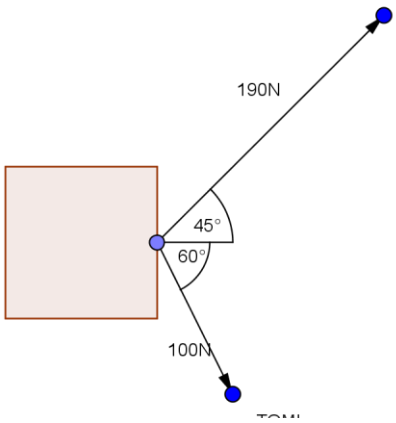
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

Slika 3.5. Zbrajanje vektora po pravilu paralelograma

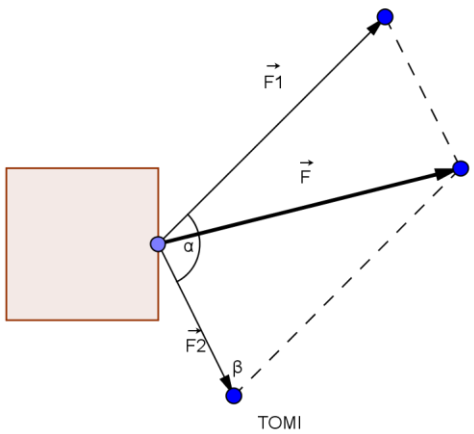
Primjer:

Luka i Tomi zajednički vuku kutiju kako je prikazano na slici.



Slika 3.6. Zbrajanje vektora – primjer

Luka vuče kutiju silom od 190 N pod kutom od 45° u odnosu na smjer kretanja. Tomi vuče silom od 100 N pod kutom od 60° u odnosu na smjer kretanja. Odredite vektor rezultantne sile. Koliki je iznos rezultantne sile?



Slika 3.7. Zbrajanje vektora – primjer

$|\vec{F_1}| = 190 \text{ N}$
$|\vec{F_2}| = 100 \text{ N}$
$\alpha = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$
$\beta = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$
$|\vec{R}|^2 = |\vec{F_1}|^2 + |\vec{F_2}|^2 - 2 \cdot |\vec{F_1}| \cdot |\vec{F_2}| \cdot \cos\beta \approx 36264.87629$

$|\vec{R}| \approx 190.43 \text{ N}$

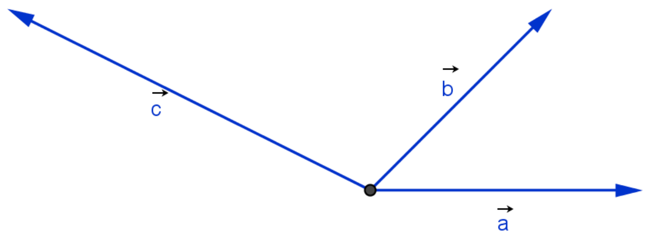
3.2.3. Množenje vektora skalarom

Umnožak vektora $\vec{a}$ i skalara k jest ***vektor $k\vec{a}$*** za koji vrijedi:

1. $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$
2. Za $k > 0$ orijentacija mu je jednaka orijentaciji vektora $\vec{a}$
   Za $k < 0$ orijentacija mu je suprotna orijentaciji vektora $\vec{a}$

Primjer:

Odredite vektor $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ ako je:

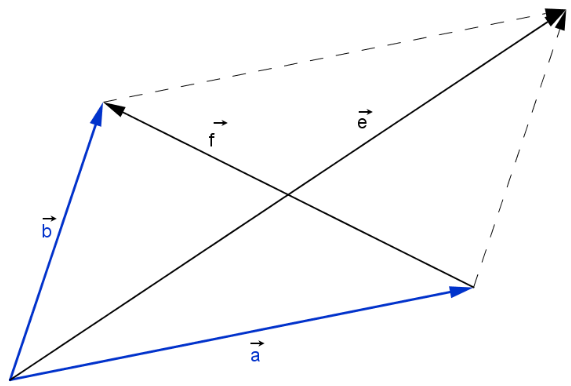


3.2.4. Linearna kombinacija vektora

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva proizvoljna nekolinearna vektora, onda se svaki vektor $\vec{c}$ ravnine određene vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ može na jedinstven način prikazati u obliku:
$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$; $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$.
U tom slučaju kažemo da je vektor $\vec{c}$ ***linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$*** ili da je vektor $\vec{c}$ ***rastavljen*** na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
Vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazivamo ***bazom*** ravnine koju određuju.

Primjer:

Izrazite vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ pomoću vektora $\vec{e}$ i $\vec{f}$:



Slika 3.8. Linearna kombinacija vektora – primjer

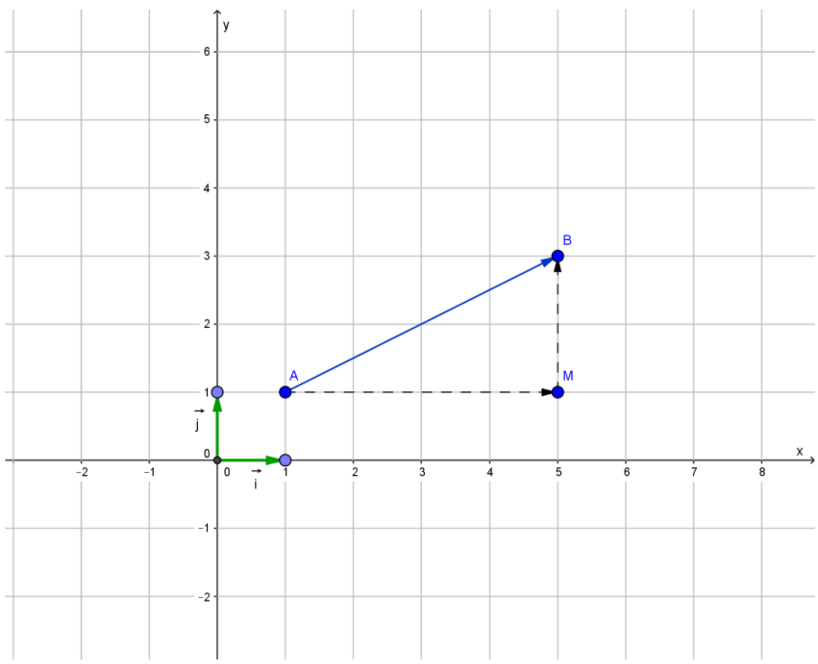
$$\vec{a} + \frac{\vec{f}}{2} = \frac{\vec{e}}{2} \quad => \; \vec{a} = \frac{\vec{e}}{2} - \frac{\vec{f}}{2}$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{e}}{2} + \frac{\vec{f}}{2}$$

3.2.5. Prikaz vektora u koordinatnom sustavu

Primjer:

$A(1{,}1),\ B(5{,}3),\ \vec{a} = \overrightarrow{AB}$



Slika 3.9. Prikaz vektora u koordinatnom sustavu

Vektori $\vec{\imath}$ i $\vec{\jmath}$ jesu jedinični linearno nezavisni vektori, tj. $|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = 1$.

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \quad => \quad \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath}$$
$$\overrightarrow{AB} = (5-1)\vec{\imath} + (3-1)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{AB} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$$

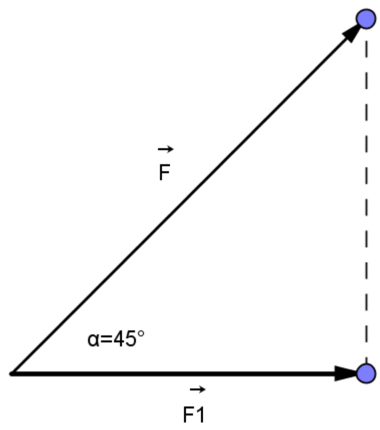
3.2.6. Skalarni umnožak vektora

Skalarni umnožak (produkt) vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ realni je broj (skalar) jednak umnošku duljina tih vektora i kosinusa kuta između njih:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi\,, \quad 0° < \varphi \leq 180°$$

Primjer:

Koliki rad obavi čovjek koji silom od 130 N vuče teret po kosini od 45° prema horizontali na putu dugom 10 m? (Rad je savladavanje sile na putu.)



Slika 3.10. Skalarni umnožak vektora – primjer

Tijelo se pod utjecajem sile $\vec{F}$ pomiče duž horizontalne ravnine i pri ovom gibanju horizontalna komponenta $\vec{F_1}$ sile $\vec{F}$ savladava otpor trenja, tj. vrši rad W u smjeru vektora puta.

$$W = |\vec{F_1}| \cdot |\vec{s}|$$

$$|\vec{F_1}| = |\vec{F}| \cdot \cos 45°$$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos 45° = 130 \cdot 10 \cdot \cos 45° = 1300 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 650\sqrt{2}\ \mathrm{J}$$

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ prikazani kao linearna kombinacija vektora $\vec{\imath}$ i $\vec{\jmath}$:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath}$$

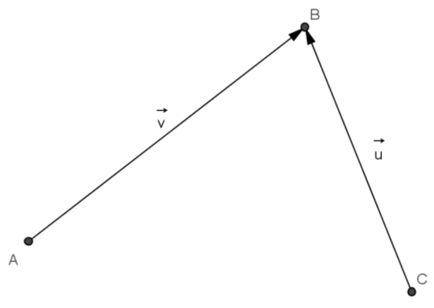
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

$$\cos\varphi = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} \cdot \sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2}}$$

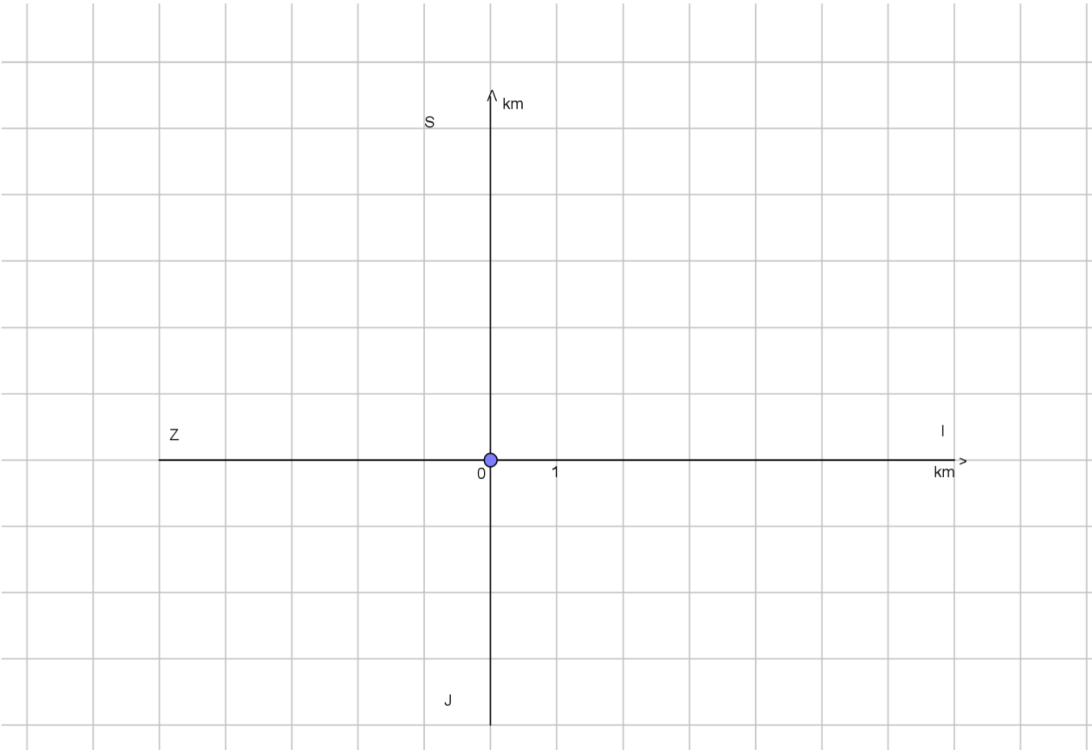
Napomena: Preporuča se sve primjere riješiti i u GeoGebri. Time ćete uvježbati crtanje u GeoGebri i naučiti koristiti različite mogućnosti koje ona nudi za jednostavnije rješavanje zadataka. Osim toga, na takav način možete provjeriti svoja rješenja.

3.3. Zadaci za vježbu

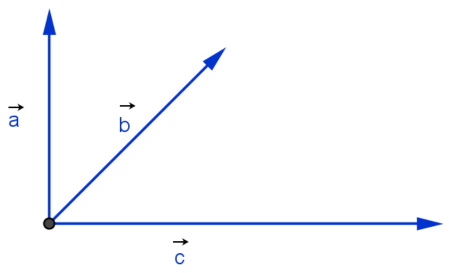
1. Za vektore na slici odredite vektor $\vec{u} - \vec{v}$.



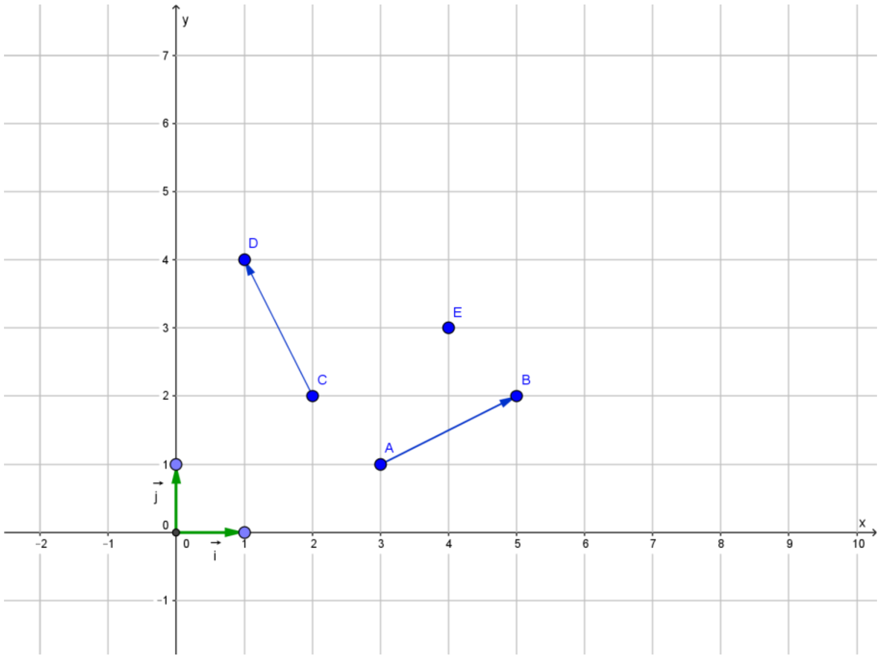
2. Prikažite grafički put kretanja Luke koji hoda 3 km prema zapadu, potom 3 km prema sjeveru i onda 2 km prema jugozapadu.



3. Za vektore sa slike odredite $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



4. Brzina motora koji potiskuje avion iznosi 150 m/s. Avion leti od sjevera prema jugu. Vjetar brzine 45 km/h puše „u leđa“ avionu. Odredite brzinu i orijentaciju leta aviona.
5. Prikažite vektor $\vec{p} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ i $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$.
6. Zadane su točke $M(-2,-3), N(1,1), P(-1,2)$. Vektor $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$ prikažite kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora $\vec{\imath}$ i $\vec{\jmath}$.
7. Zadani su vektori $\vec{a} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. Računski i grafički odredite vektor $\vec{a} + 2\vec{b}$.
8. Zadani su vektori $\vec{a} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, $\vec{b} = \alpha\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Odredite realni parametar α tako da vektori budu:
   a) okomiti,
   b) kolinearni,
   c) jednake duljine.
9. Odredite kut između vektora $\vec{a} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ i $\vec{b} = -\vec{\imath} + \overline{5\jmath}$.
10. Na slici su zadani vektori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ i točka E. Ucrtajte točku F tako da je $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.



4. DODATAK: GEOGEBRA APLETI

Uz ovaj priručnik za praćenje nastave fakultativnog predmeta dostupni su i gotovi dinamički interaktivni apleti napravljeni u GeoGebri. Njima se može pristupiti preko službene stranice GeoGebre gdje su pohranjeni u obliku e-udžbenika pod nazivom *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima* te preko platforme za e-učenje i poučavanje izrađene za ovaj predmet na Moodleu. U oba slučaja postavljeno je nekoliko apleta za učenje sadržaja cjeline Linearna funkcija i nekoliko za područje Vektori.

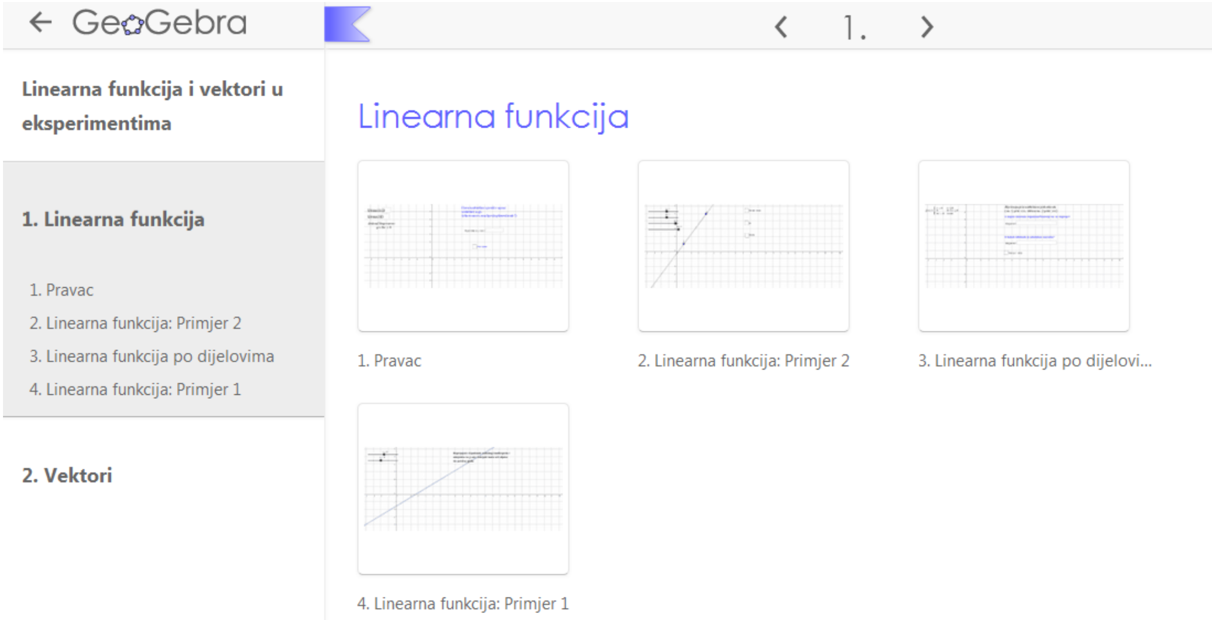
Na službenoj stranici GeoGebre napravljena je i grupa *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima* gdje su pohranjeni svi dinamički i interaktivni apleti.

Pri izradi materijala za ovaj fakultativan predmet rješenja gotovo svih zadataka napravljena su u GeoGebri. To su .ggb datoteke koje nisu dinamičke ni interaktivne, no apleti su .ggb datoteke u kojima se koriste klizači, potvrdni okviri i ostali objekti koji dovode do dinamičnosti te na takav način služe za učenje. Velika je značajka što su neki apleti interaktivni što znači da učenici dobiju povratnu informaciju pri upisivanju rješenja zadatka.

Apleti se izrađuju lokalno na računalu, a zatim se postavljaju na stranice GeoGebre te na Moodle. Sadržaji će se dopunjavati po potrebi.

4.1. e-udžbenik

Slika 4.1. Naslovna stranica e–udžbenika

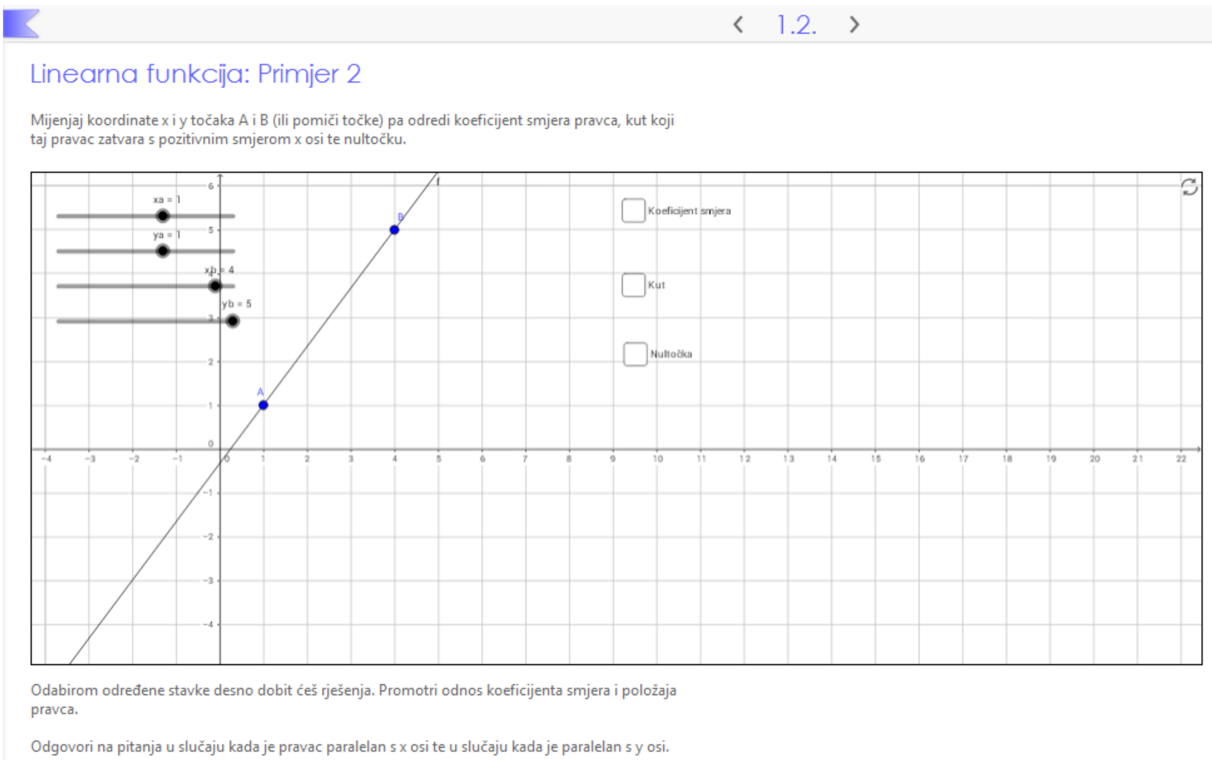


Slika 4.2. Cjelina Linearna funkcija u e-udžbeniku

Odabirom jednog od apleta on se otvara i možete istraživati.

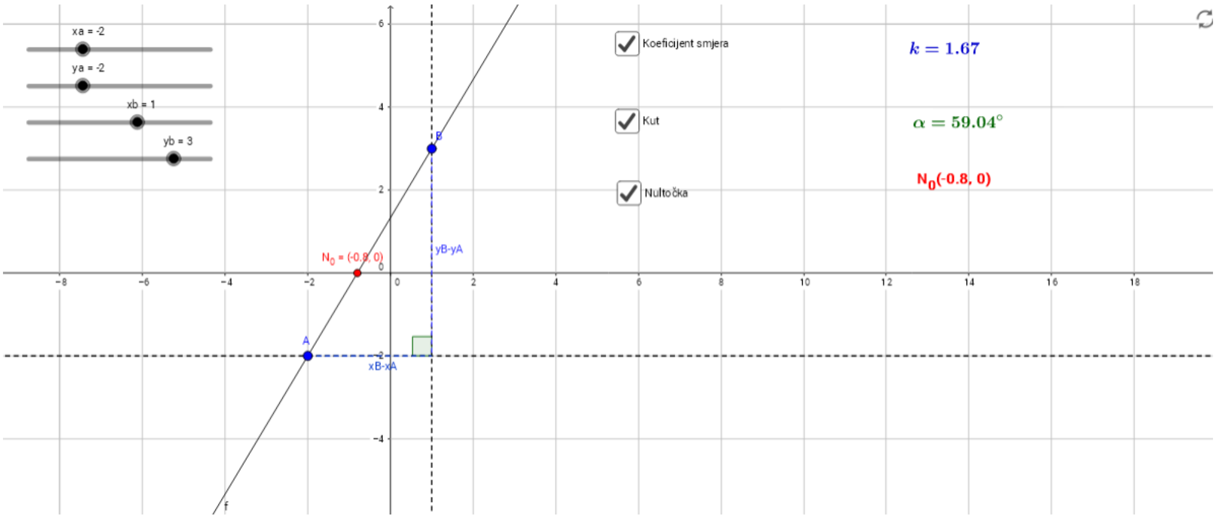
U nastavku će biti objašnjena tri apleta kao primjeri.

Aplet 1. Linearna funkcija: Primjer 2.



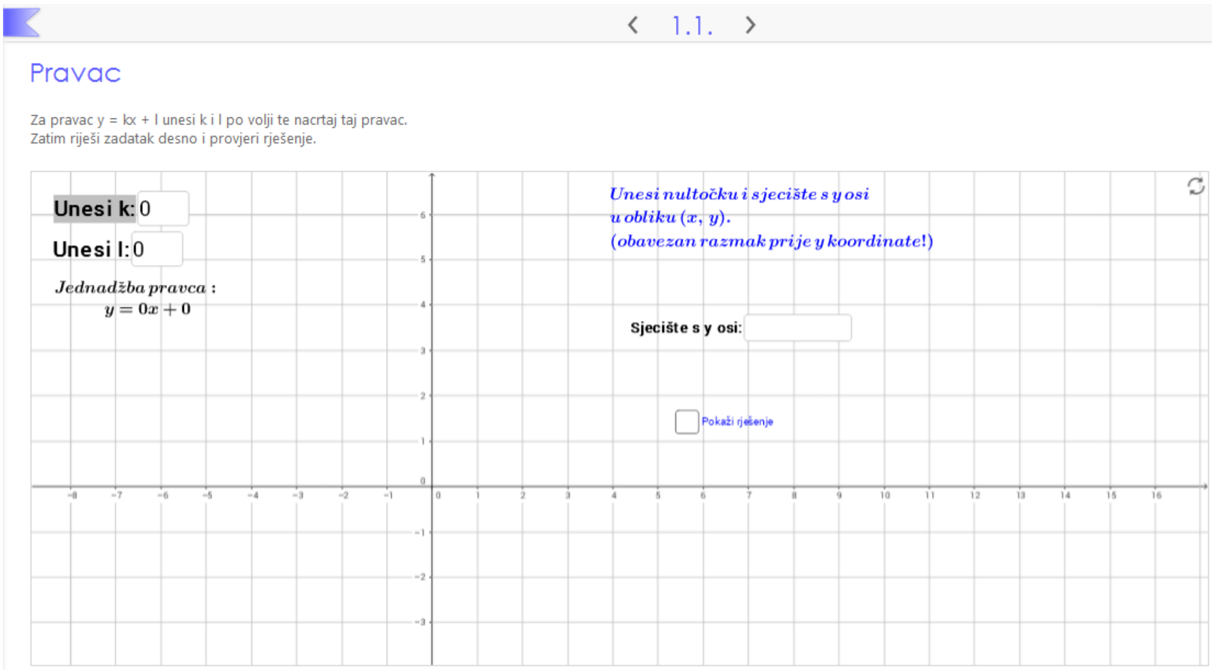
Slika 4.3. Početni prikaz apleta

Mijenjajući vrijednosti klizača (x i y koordinate točaka A i B) pomiču se točke. Ako je odabran potvrdni okvir, lijevo se prikazuje rješenje pa možete vidjeti kako se mijenja koeficijent smjera pravca, kut i nultočka s obzirom na položaj grafa linearne funkcije. (Slika 4.4.)



Slika 4.4. Dinamički aplet

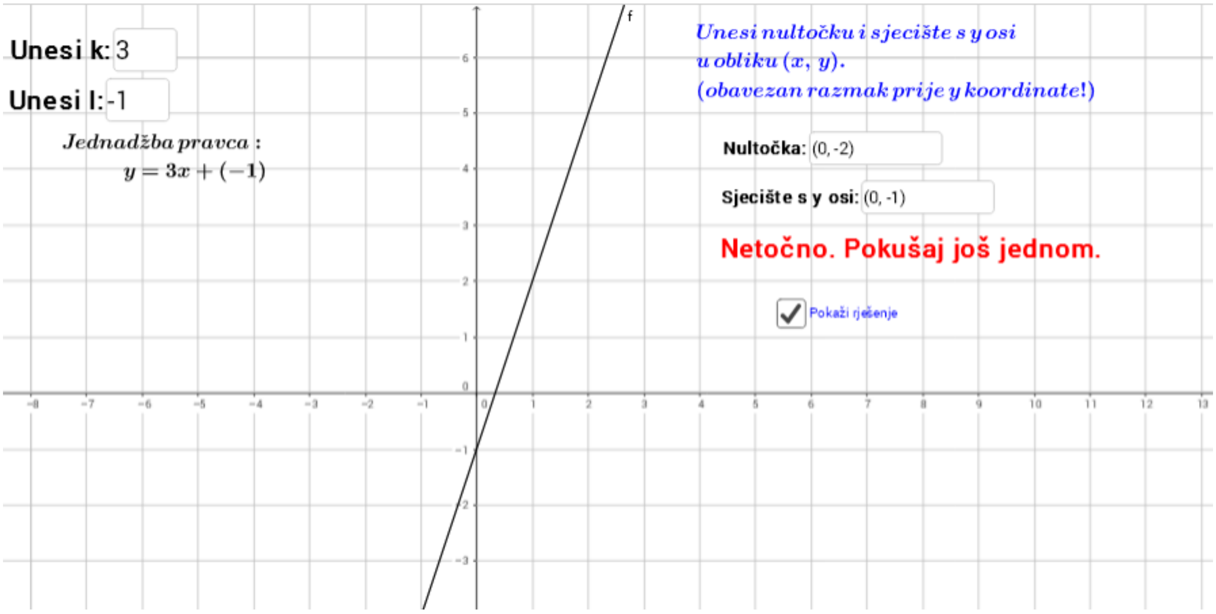
Aplet 2. Pravac



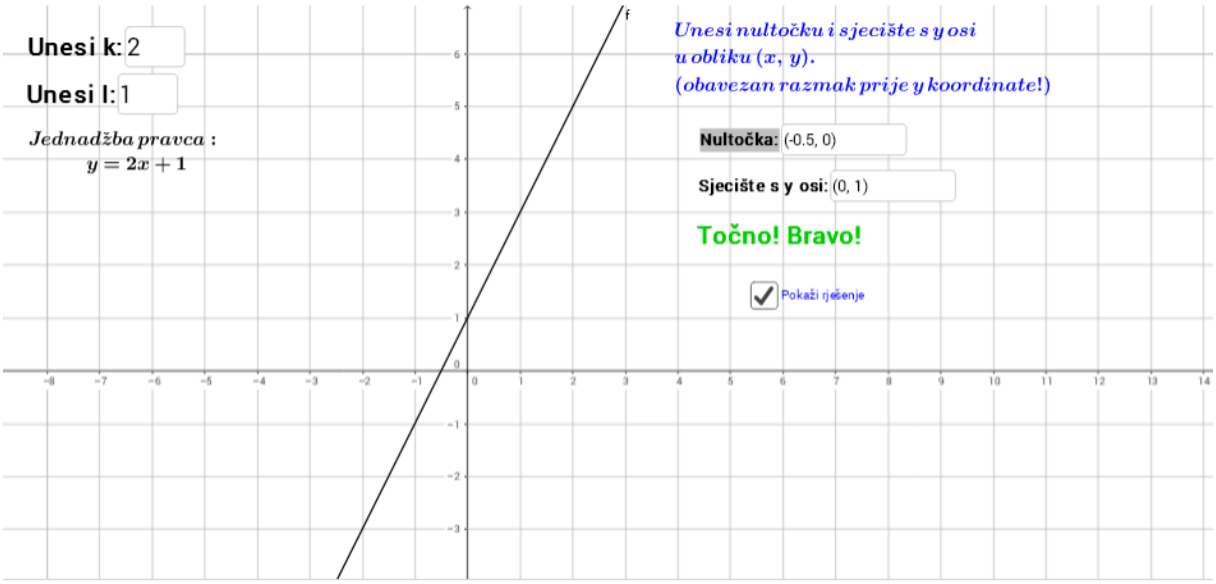
Slika 4.5. Početni prikaz apleta

U ovom apletu treba unositi različite vrijednosti za koeficijent smjera k i odsječak na y osi l. Ispod će se uvijek ispisati jednadžba pravca s vrijednostima koeficijenata koji su upisani, a odabirom potvrdnog okvira Pokaži rješenje prikazat će se graf. Inicijalne su vrijednosti za k i l nula i sve dok je tako trebate napisati koje je sjecište pravca s y osi. Kad unesete vrijednost za k različitu od 0, dobivate novo pitanje. Treba napisati nultočku. Dobijete povratnu informaciju o točnosti oba odgovora koja su unesena pri čemu je važno naglasiti uputu koju imate za oblik unosa točke.

Pri kreiranju ovog materijala cilj je bio postignuti interaktivnost i to je u ovom slučaju ostvareno korištenjem naredbe za pretvaranje brojeva u tekst. Pri tome je trebalo biti oprezan jer je duljina objekta bila promijenjena pa je nužno u ovom obliku, kako je navedeno u apletu, unositi točke. Na taj način provjera unesenog izvršit će se na dobar način.



Slika 4.6. Aplet Pravac – netočan unos



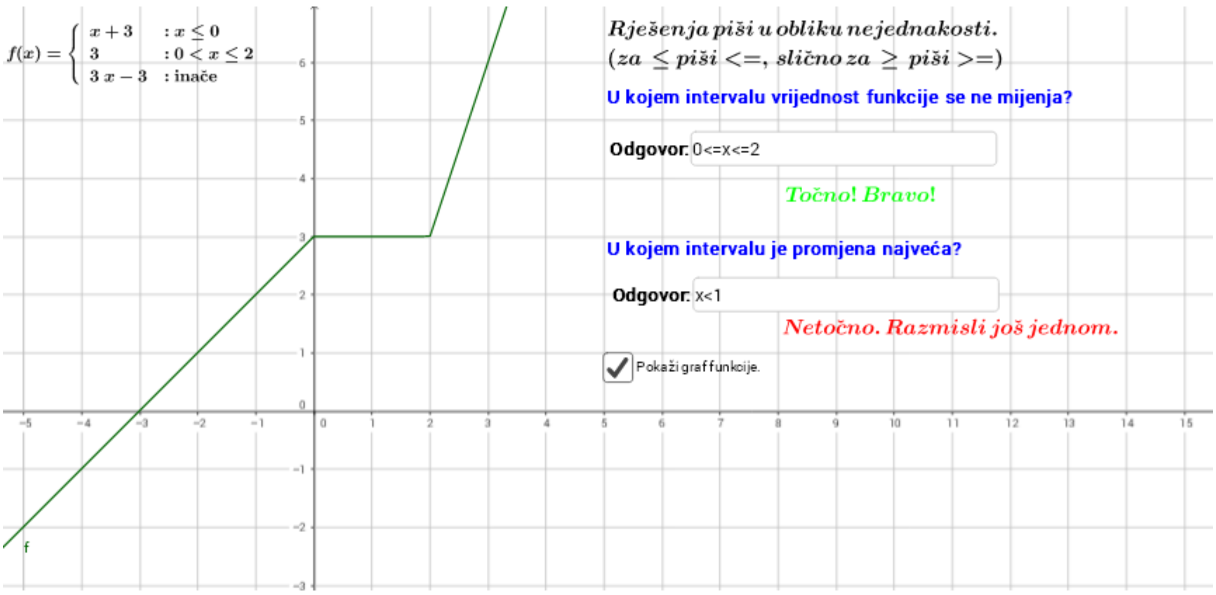
Slika 4.7. Aplet Pravac – točan unos

Aplet 3. Funkcija zadana po dijelovima

Slika 4.8. Početni prikaz apleta

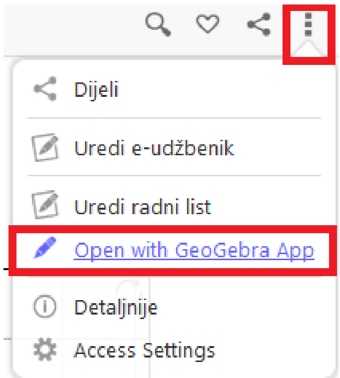
Ovaj aplet sličan je prethodno objašnjenom. Pri rješavanju zadataka u ovom apletu treba razmišljati o toku funkcije te utjecaju koeficijenta smjera na njega što će biti korisno pri obradi podataka dobivenih eksperimentom u fizici.

Nakon unošenja odgovora dobijete povratnu informaciju, no u ovom apletu za svaki uneseni odgovor zasebno.



Slika 4.9. Aplet – rješenje

Napomena: Za uređivanje apleta, na primjer crtanje pravaca, potrebno je otvoriti aplet u posebnom obliku, točnije preko *GeoGebra App* opcije. (Slika 4.10.)



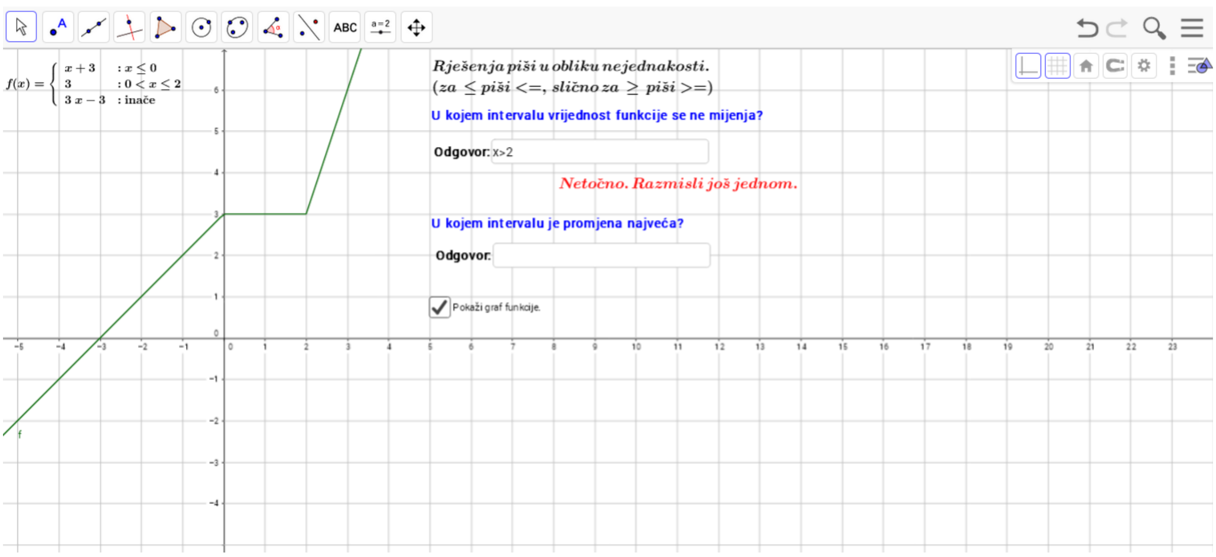
Slika 4.10. Uređivanje GeoGebra apleta

Ispod svakog apleta nalaze se pitanja različitog tipa: višestrukog izbora, kratkog odgovora… Odgovarajući na pitanja, provjeravate koliko ste shvatili nastavne sadržaje koje ste vježbali u određenom apletu. Apleti mogu poslužiti za vježbu i samostalan rad te mogućnost učenja same izrade interaktivnih dinamičkih apleta ukoliko to nekoga bude zanimalo.

Svi apleti su pohranjeni u grupi na službenoj stranici GeoGebre, stoga oni mogu poslužiti kao povratna informacija nastavniku o napredovanju učenika i razini na kojoj se njihovo znanje nalazi u određenom ternutku.

4.2. Apleti na Moodle-u

Na sljedećoj slici prikazan je aplet otvoren preko Moodlea. Apleti se na Moodle uvoze preko GeoGebra portala, no malo drukčije izgledaju nego u e-udžbeniku. Ovdje su vam dostupni svi alati kao da koristite GeoGebru lokalno pa možete više toga mijenjati, dodavati…



Slika 4.11. Aplet otvoren preko Moodlea

5. LINEARNA FUNKCIJA U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA

5.1. Obrada rezultata mjerenja i račun pogrešaka

Mjerenje je postupak kojim se nepoznata fizička veličina uspoređuje sa standardom fizičkih veličina. *Pramjera* ili *etalon* predstavlja osnovnu mjeru, standard fizičkih veličina ili je to precizno napravljen uzorak mjera koji služi za provjeravanje istih takvih mjera koje su u uporabi. Rezultat je mjerenja neke fizičke veličine broj koji nam kazuje koliko je puta ta fizička veličina veća ili manja od etalona.

Mjerenje nam neće uvijek dati točnu vrijednost neke veličine jer se u svakom mjerenju pojavljuju pogreške. Razlozi za pojavljivanje pogrešaka mogu biti različiti, no najčešći razlozi za to jesu: nesavršenost mjernih instrumenata pomoću kojih obavljamo mjerenja, nesavršenost naših osjetila, ali ponekad je razlog i nepažnja onoga koji vrši mjerenje.

Fizičke veličine možemo mjeriti na dva načina: direktno i indirektno. Računski dobivamo vrijednost indirektno mjerenih veličina uz pomoć odgovarajućeg matematičkog izraza.

Kako je cilj svakog mjerenja odrediti točnu vrijednost nepoznate fizičke veličine, potrebno je provesti račun pogrešaka koji će nam omogućiti da utvrdimo odstupanje naših mjerenja od prave vrijednosti.

5.1.1. Vrste pogrešaka

Pogreške mogu biti: sistemske, slučajne ili grube.

Grube pogreške javljaju se zbog pogrešnog očitavanja ili previda (omaške) tijekom mjerenja, a možemo ih izbjeći pažljivijim mjerenjima. Primjer: mjerite duljinu hodnika i umjesto 4,72 m upišete 4,27 m.

Sistemske (sustavne) pogreške najčešće se pojavljuju zbog neispravnosti pribora te krive metode mjerenja. Dakle nastaju zbog neispravnosti i moguće ih je ukloniti iako to nije uvijek lako.

Slučajne pogreške dovodimo u vezu s neizbježnom nesavršenošću mjernih instrumenata i naših osjetila (opažača), ali i u vezu s utjecajima okoline koje ne možemo predvidjeti. Da bismo smanjili slučajne pogreške, trebamo izvesti veći broj mjerenja čije rezultate zatim obradimo statističkom analizom.

5.1.2. Račun pogrešaka za direktno mjerene veličine

Već znamo da je u svakom mjerenju prisutna slučajna pogreška u većoj ili manjoj mjeri pa ne možemo odrediti pravu vrijednost veličine koju mjerimo. Smatra se da je najbolja procjena prave vrijednosti određene veličine njezina srednja vrijednost ili aritmetička sredina svih rezultata mjerenja.

Neka su podaci koje dobijemo mjerenjem neke veličine:

$$c_1, c_2, c_3, c_4 \ldots c_n$$

Njihovu **srednju vrijednost (aritmetičku sredinu)** dobit ćemo tako da sve vrijednosti zbrojimo, a taj zbroj zatim podijelimo s brojem mjerenja:

$$\bar{c} = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_n}{n}$$

Odstupanja pojedinog mjerenja od vrijednosti $\bar{c}$ nazivamo apsolutnim pogreškama. One iznose:

$\bar{c} - c_1 = \Delta c_1$

$\bar{c} - c_2 = \Delta c_2$

$\bar{c} - c_3 = \Delta c_3$

.

.

$\bar{c} - c_n = \Delta c_n$

Apsolutnu vrijednost Δc koja najviše odstupa od srednje vrijednosti $\bar{c}$ nazivamo **maksimalna apsolutna pogreška** Δc_m.

Konačni rezultat za neku mjerenu veličinu pišemo na sljedeći način:

$$c = (\bar{c} \pm \Delta c_m)$$

s tim da se izvan zagrade mora napisati i pripadajuća mjerna jedinica.

Ako želimo procijeniti koliko je rezultat mjerenja točan, moramo odrediti **maksimalnu relativnu pogrešku**. Maksimalna relativna pogreška jest omjer između maksimalne apsolutne pogreške i srednje vrijednosti svih mjerenja, a može se izraziti i postotkom:

$$r_m = \frac{\Delta c_m}{\bar{c}} = \left(\frac{\Delta c_m}{\bar{c}} \cdot 100 \right) \%$$

<u>Primjer obrade rezultata mjerenja</u>

Zamislimo da želimo odrediti duljinu udžbenika. Kako bismo tu duljinu odredili što točnije, napravit ćemo nekoliko mjerenja i zatim odrediti aritmetičku sredinu, maksimalnu apsolutnu i maksimalnu relativnu pogrešku. Neka su na primjer mjerni podaci dani u Tablica 5.1.

Redni broj mjerenja	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
d/cm	27,9	28,15	27,95	27,95	27,93	27,91	28	27,9	28	28,1

Tablica 5.1. Rezultati mjerenja duljine (d) udžbenika.

Iz tih podataka možemo izračunati srednju vrijednost: $\bar{d} = 27{,}8\ cm$

Sada možemo odrediti maksimalnu apsolutnu pogrešku: Δd_m = -0,17 cm

Rezultat mjerenja možemo sada napisati na sljedeći način: $d = \bar{d} \pm \Delta d_m$

d = (27,98 ± 0,17) cm

Maksimalna relativna pogreška iznosi:

$$r_m = \left(\frac{\Delta d_m}{\bar{d}} \cdot 100 \right) \%$$

$$r_m = \left(\frac{0{,}171 \text{ cm}}{27{,}979 \text{ cm}} \cdot 100 \right) \%$$

$$r_m = 0{,}61\%$$

Zadatak 1.

Zamislimo da želimo odrediti širinu udžbenika. Izmjereni podaci dani su u tablici. Odredimo aritmetičku sredinu, maksimalnu apsolutnu i maksimalnu relativnu pogrešku.

Redni broj mjerenja	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
b/cm	20,1	20	19,9	20,05	20	19,9	19,95	19,8	20	19,9

Tablica 5.2. Rezultati mjerenja širine (b) udžbenika

Rješenje: b = (19,96 ± 0,16) cm. r_m = 0,8 %

5.1.3. Račun pogrešaka za indirektno određene veličine

Često se događa da fizičke veličine ne mjerimo neposredno, nego ih izračunamo pomoću veličina koje smo neposredno izmjerili. Iz toga razloga možemo se zapitati kako pogreške izmjerenih veličina utječu na rezultate koje dobivamo računskim postupkom.

Sljedeća tablica omogućava nam izračunavanje apsolutne i relativne pogreške koje dobijemo pomoću pogrešaka izmjerenih veličina.

	Apsolutna pogreška	Relativna pogreška
$\bar{a} + \bar{b}$	$\Delta a + \Delta b$	$\frac{\Delta a + \Delta b}{\bar{a} + \bar{b}}$
$\bar{a} - \bar{b}$	$\Delta a + \Delta b$	$\frac{\Delta a + \Delta b}{\bar{a} - \bar{b}}$
$n\,\bar{a}$	$n\,\Delta a$	$\frac{\Delta a}{\bar{a}}$
$\bar{a}\,\bar{b}$	$b\,\Delta a + a\,\Delta b$	$\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}$
$\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$	$\frac{b\,\Delta a + a\,\Delta b}{b^2}$	$\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}$
$\bar{a}^2$	$2a\,\Delta a$	$2\frac{\Delta a}{\bar{a}}$

Tablica 5.3. Apsolutna i relativna pogreška

Primjer obrade rezultata mjerenja

Odredite srednju vrijednost, apsolutnu i relativnu pogrešku površine jedne stranice udžbenika. Koristite podatke iz tablica 5.1. i 5.2.

$P = d \cdot b$

$\bar{P} = \bar{d} \cdot \bar{b} = 558.46\ \mathrm{cm}^2$ $\quad \Delta P = \Delta d \cdot \bar{b} + \bar{\mathrm{d}} \cdot \Delta \mathrm{b} = 7{,}89\ \mathrm{cm}^2$ $\quad r = \frac{\Delta P}{\bar{P}} = 1{,}41\%$

$P = (558{,}46 \pm 7{,}89)\ \mathrm{cm}^2$

Zadatak 2.

a) Izmjerite duljinu i širinu školske klupe. Neka to svaki učenik u razredu napravi za sebe, a potom treba sve rezultate zabilježiti na ploči.

b) Odredite srednju vrijednost, apsolutnu i relativnu pogrešku duljine stola.

c) Odredite srednju vrijednost, apsolutnu i relativnu pogrešku širine stola.

d) Odredite srednju vrijednost, apsolutnu i relativnu pogrešku površine stola.

5.1.4. Istraživanja gibanja pod utjecajem stalne sile

Ponovimo i provjerimo

Gibanje tijela predstavlja promjenu njegovog položaja u odnosu na drugo tijelo. Promjena položaja tijela događa se u određenom vremenu. Fizičke veličine koje koristimo za opis gibanja stoga su put (*s*) i vrijeme (*t*). Pomoću ove dvije veličine možemo definirati druge koje nam pomažu u opisivanju gibanja.

Prije svega definiramo brzinu (*v*): promjena položaja tijela u određenom vremenskom intervalu te akceleraciju (*a*): promjena brzine u određenom vremenskom intervalu.

Algebarski izrazi koje koristimo jesu: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ i $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Promjenu položaja tijela u ovisnosti o vremenu možemo prikazati na različite načine: tablično (aritmetički); grafički (geometrijski) i algebarski (pomoću algebarskog izraza – formule).

Naš je zadatak upravo istražiti i povezati ova tri načina prikaza rezultata.

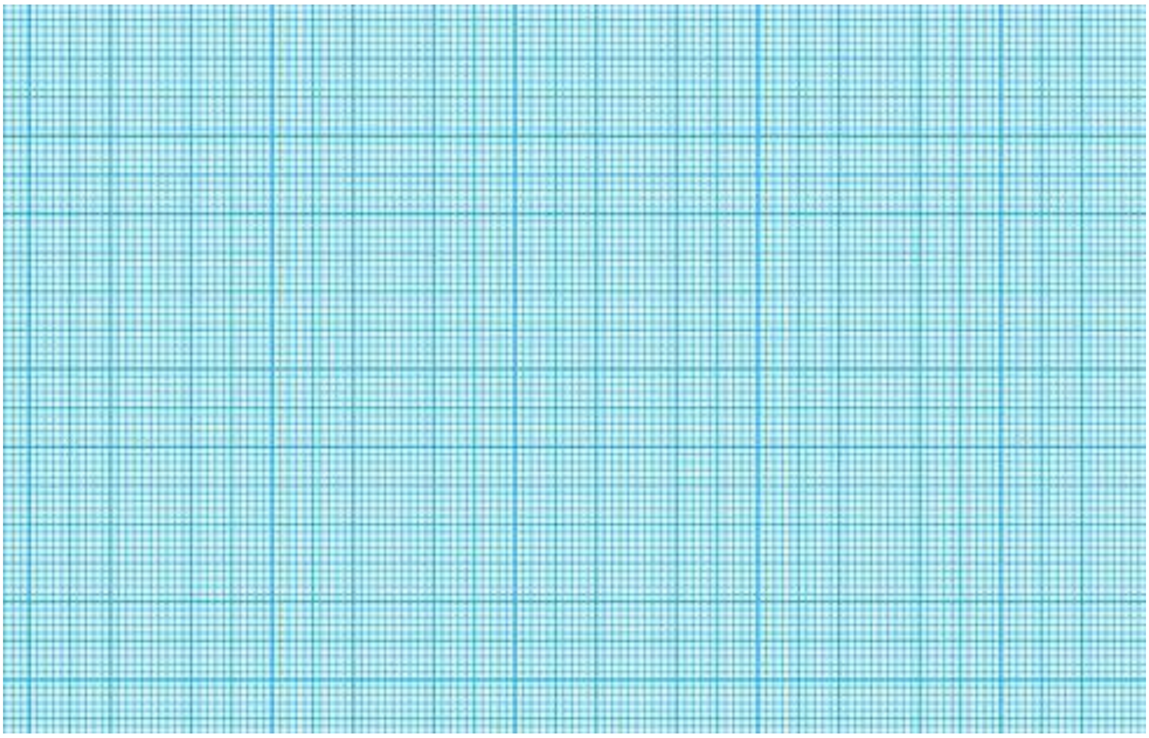
Pokus: Jednoliko ubrzano gibanje postiže se tako da se kolica pokreću utegom koji je konopcem vezan za kolica, a preko koloture visi na kraju stola te svojom težinom povlači kolica. Tada težina utega predstavlja stalnu silu koja uzrokuje gibanje kolica; ili nagibom stola, tada sila teža uzrokuje gibanje kolica. Na papirnu traku, koju smo pričvrstili na kolica, snimimo pomoću tipkala gibanje kolica pod utjecajem stalne sile.

Primjer 1. Analiziranjem tragova tipkala na traci prijeđeni put kolica za određeno vrijeme prikazan je u tablici Tablica 5.4.

t/s	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
s/cm	0	0,6	1,8	3,5	5,8	8,6	12	16	20,5	25,6	31,3	37,6	44,5	52

Tablica 5.4. Prijeđeni put kolica

Zadatak 1. Na milimetarskom papiru nacrtajte *s-t* grafički prikaz ovoga gibanja.



Zadatak 2. Koju krivulju predstavlja grafički prikaz?

Zadatak 3. Nacrtajte grafički prikaz brzina – vrijeme tog gibanja.

Uputa: Precrtajte tablicu 5.4. te je nadopunite retkom: v (cm·s^{-1}).

Brzinu izračunavaju prema izrazu $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Zadatak 4. Kakva je ovisnost prikazanih veličina?

Zadatak 5. Nacrtajte grafički prikaz akceleracija – vrijeme toga gibanja.

Uputa: Tablicu koju smo maloprije nacrtali, nadopunimo još jednim retkom u kojem izračunajte akceleraciju prema izrazu $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Zadatak 6. Odredite srednju vrijednost, maksimalnu apsolutnu i maksimalnu relativnu pogrešku akceleracije te rezultat zapišite u ispravnom obliku.

Zadatak 7. Odredite nagib pravca na svom prikazu ovisnosti brzine o vremenu i izračunajte iz tog nagiba akceleraciju. Usporedite svoju vrijednost sa srednjom vrijednošću akceleracije koju ste izračunali.

Nagib pravca je moguće odrediti uzimajući koordinate dvije točke na *v-t* grafu i $nagib = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$, gdje prva odabrana točka ima koordinate (t_1, v_1) , druga (t_2, v_2).

Primjer 2. Analiziranjem tragova tipkala na traci prijeđeni put kolica za određeno vrijeme prikazan je u tablici 5.5.

t/s	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
s/cm	0	2,2	4,6	7,2	10	13	16,2	19,6	23,3	27,1	31,1

Tablica 5.5. Put kolica

Zadatak 8. Na milimetarskom papiru nacrtajte *s*-*t* grafički prikaz ovoga gibanja.

Zadatak 9. Nacrtajte grafički prikaz brzina – vrijeme tog gibanja.

Zadatak 10. Opišite ovisnost prikazanih veličina.

Zadatak 11. Nacrtajte grafički prikaz akceleracija – vrijeme tog gibanja.

Zadatak 12. Odredite srednju vrijednost, maksimalnu apsolutnu i maksimalnu relativnu pogrešku akceleracije te rezultat zapišite u ispravnom obliku**.**

Zadatak 13. Odredite nagib pravca na svom grafičkom prikazu i izračunajte iz tog nagiba akceleraciju. Usporedite svoju vrijednost sa srednjom vrijednošću akceleracije koju ste izračunali.

5.2. Elastična sila i određivanje konstante elastičnosti opruge

Međudjelovanje okoline i tijela (sila) može uzrokovati promjenu stanja gibanja i to nazivamo *dinamičko djelovanje.* Često sila ne mijenja stanje gibanja, nego samo oblik. To je *statičko djelovanje*.

Postoji sila kojom se tijelo opire promjeni oblika te s prestankom vanjskog međudjelovanja vraća tijelo u početni oblik. Tu silu nazivamo *elastična sila.*

Promjenu oblika tijela nazivamo *deformacija*. Razlikujemo elastičnu deformaciju i plastičnu deformaciju. Elastična deformacija takva je deformacija pri kojoj se tijelo prestankom međudjelovanja s okolinom vraća u prvobitni oblik, dok kod plastične deformacije ostaje deformirano.

Elastičnu silu najčešće uočavamo na opruzi ili gumi.

Robert Hooke (1635. – 1703.) prvi je opisao povezanost između produljenja i sile koja uzrokuje to produljenje te algebarski zapis koji pokazuje tu vezu nazivamo *Hookeovim zakonom,* koji nam je za oprugu poznat u obliku: $F_e = -k\,\Delta l$ (orijentacija sile suprotna je produljenju, zato „-“).

Želimo utvrditi povezanost između *elastične sile* (F_e), *produljenja* Δl (Δx) *i koeficijenta elastičnosti tijela* (k) koji predstavlja posljedicu unutrašnje strukture materijala.

Eksperiment: (Ako smo ga u mogućnosti napraviti).

Na elastičnu oprugu stavljamo utege različitih masa te mjerimo njenu duljinu. Rezultate mjerenja prikazujemo tablično.

Primjer 1. Mjerenjem su dobiveni sljedeći podaci:

Masa utega	Duljina opruge				
m/g	x_1/cm	x_2/cm	x_3/cm	x_4/cm	x_5/cm
0	10	10	9,9	10	9,8
50	12	11,9	12,1	11,9	12
100	13,9	14,1	14	13,9	14,2
150	16,1	15,9	15,8	16	15,9
200	18,1	18,2	18,2	18,3	18
250	19,8	20,1	20,2	20,2	19,9

Tablica 5.6. Produljenje opruge 1

Zadatak 1. Odredite srednju vrijednost duljine opruge za svaku pojedinu masu te apsolutnu pogrešku.

Zadatak 2. Izračunajte srednje produljenje opruge za svaku pojedinu silu te napravite grafički prikaz sila – produljenje. (Za izračunavanje sile koristiti vrijednost $g = 10\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$)

$\Delta l_i = l_i - l_1; \qquad F = mg$

F/N	Δl/cm
0	0
0,5	2,04
1	4,08
1,5	6
2	8,22
2,5	10,01

Tablica 5.7. Srednje produljenje

Grafički prikaz 5.1. Ovisnost sile o produljenju

Zadatak 3. Kakva je ovisnost sile o produljenju opruge?

Možete li iz grafičkog prikaza odrediti kolika sila uzrokuje produljenje od 15 cm i koliko će biti produljenje ako je uzrokovano silom od 4 N?

Zadatak 4. Iz poznatih vrijednosti sile i produljenja opruge odredite njezinu konstantu k (konstantu elastičnosti).

$\mathrm{F/N}$	$\mathrm{\Delta l/cm}$	$\mathrm{k/N \cdot m^{-1}}$
0	0	
0,5	2,04	0,2451
1	4,08	0,2451
1,5	6	0,25
2	8,22	0,2433
2,5	10,01	0,2498

Tablica 5.8. Konstanta elastičnosti

Zadatak 5. Odredite koeficijent elastičnosti opruge pomoću grafičkog prikaza 5.1.

Koeficijent smjera ili nagib pravca mogu odrediti uzimajući koordinate dvije točke na $F - \Delta l$ grafu i $nagib = \frac{F_2 - F_1}{\Delta l_2 - \Delta l_1}$, gdje prva odabrana točka ima koordinate $(F_1, \Delta l_1)$, druga $(F_2, \Delta l_2)$.

Primjer 2. Mjerenjem duljine druge opruge dobili smo sljedeće podatke.

Masa utega	Duljina opruge				
$\mathrm{m/g}$	$\mathrm{x_1/cm}$	$\mathrm{x_2/cm}$	$\mathrm{x_3/cm}$	$\mathrm{x_4/cm}$	$\mathrm{x_5/cm}$
0	8	8,1	8	7,9	8
50	12,1	12,3	12,1	12	12,2
75	14,2	14	14,1	13,9	14,3
150	20,2	20,1	20,3	20,2	20,1
250	28,5	28,7	28,5	28,8	28,6

Tablica 5.9. Produljenje opruge 2

Zadatak 6. Napravite grafički prikaz sila – produljenje.

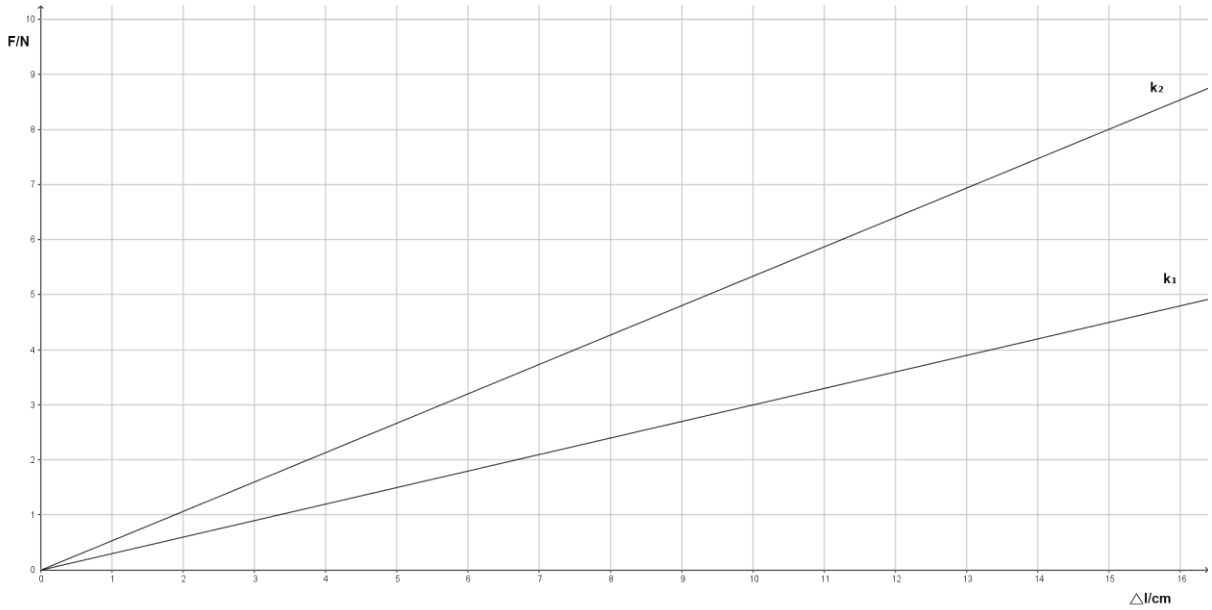
Zadatak 7. Odredite konstantu elastičnosti opruge s grafičkog prikaza u zadatku 6.

Zadatak 8. Odredite konstantu elastičnosti opruge računskim putem.

Koliko se rezultati dobiveni računskim i grafičkim načinom razlikuju?

Zadatak 9. Usporedite izgled grafa iz primjera 1. i primjera 2. Što možete zaključiti iz tih grafova?

Primjer 3: Na osnovi grafičkog prikaza sila – produljenje odredite konstante elastičnosti opruga.



Slika 5.1. Određivanje koeficijenta elastičnosti

5.3. Period jednostavnog njihala

Jednostavno (matematičko) njihalo sastavljeno je od nerastezljive niti i kuglice male mase koja je obješena na tu nit i predstavlja primjer jedne vrste gibanja koju nazivamo *harmonijsko titranje*.

Harmonijsko titranje periodično je gibanje pod utjecajem elastične sile.

Periodično gibanje jest gibanje koje se ponavlja nakon određenog vremenskog intervala. Periodično gibanje po dijelu krivulje oko nekog položaja nazivamo *titranje.*

Period (T) vremenski je interval nakon kojeg se gibanje ponavlja. Uz period vežemo *frekvenciju* (f) koja je definirana kao broj ponavljanja u jedinici vremena ili recipročna vrijednost perioda.

Slika 5.2. Njihalo

$$f = \frac{1}{T}$$

Naš je zadatak da istražimo ovisnost osnovnih veličina koje su karakteristične za jednostavno njihalo, a to su: period (T), duljina njihala (l), masa obješenog tijela (m) i kut (Θ) za koji otklonimo njihalo iz položaja u kojem miruje (iz ravnoteže).

PREPORUKA: Ako je moguće napraviti eksperiment te provesti mjerenja, a ako nije, možemo se koristiti rezultatima već ranije učinjenog mjerenja.

PRIBOR: nit konca duga barem 1 m, nosač za njihalo, kuglica, mjerna vrpca, zaporni sat (mobitel) i kutomjer.

Zadatak 1. Istražite kako period T ovisi o amplitudi, odnosno o kutu θ za danu masu njihala.

Odredite srednju vrijednost i apsolutnu pogrešku pri mjerenju perioda.

Ovisnost $T - \theta$ prikažite grafički na milimetarskom papiru .

$m = 40\ \text{g}$

$l_0 = 54$ cm

$N = 5$

$$T = \frac{t}{N}$$

$\theta/°$	t/s	T/s
50	7,46	1,492
40	7,59	1,518
30	7,53	1,506
45	7,64	1,528
20	7,52	1,504
10	7,54	1,508

Tablica 5.10. Ovisnost perioda o kutu

Napomena:

Masa je kuglice stalna tijekom cijele vježbe i treba pored tablice zapisati koliko ona iznosi.

Pored tablice treba zapisati i broj titranja koji je mjeren te kolika je duljina niti.

Zadatak 2. Kako period T ovisi o masi m njihala za danu duljinu l? Prikažite tu ovisnost grafički.

$N = 5$

$\theta = 40°$

$l = 0{,}565\ \text{m}$

m/g	t/s	T/s
40	7,59	1,518
65	7,64	1,528
90	7,61	1,522
115	7,53	1,506
140	7,69	1,538
100	7,63	1,526

Tablica 5.11. Ovisnost perioda o masi

Napomena: Uz broj titraja pored tablice treba upisati amplitudu (kut), koja (koji) za sve mase mora biti jednaka (isti) te kolika je duljina niti korištena u ovom dijelu vježbe.

Zadatak 3. Istražite kako period T ovisi o duljini njihala l za danu masu njihala. Na milimetarskom papiru nacrtajte ovisnost $T - l$, a zatim i ovisnost $T^2 - l$ i ovisnost $T - \sqrt{l}$.

m = 40 g

θ = 40°

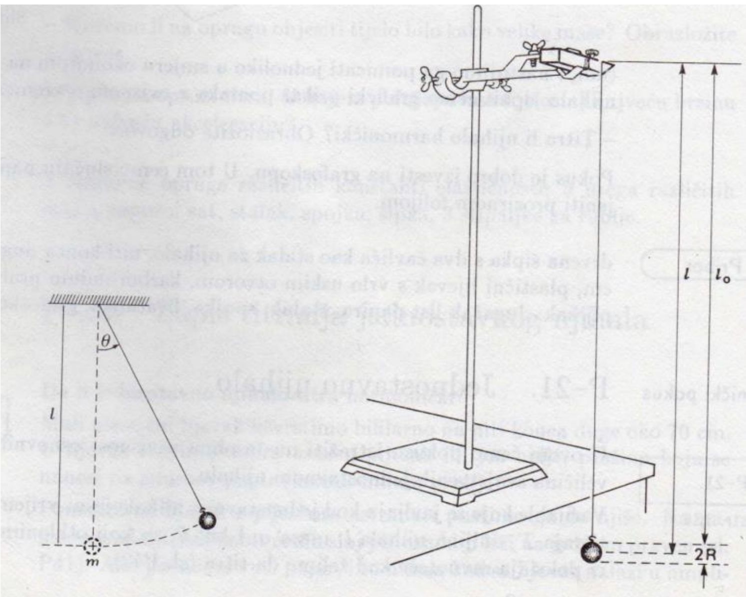
N = 5

l/cm	t/s	T/s	T^2/s^2
54	7,38	1,476	2,179
44	6,63	1,326	1,758
34	5,8	1,16	1,346
24	4,88	0,976	0,953
65	8,1	1,62	2,624
80	9	1,8	3,24

Tablica 5.12. Ovisnost perioda o duljini niti

Napomena: Masa je kuglice stalna tijekom cijele vježbe i treba pored tablice zapisati koliko ona iznosi. Pored tablice treba zapisati i broj titranja koji je mjeren te kolika je amplituda.

Zadatak 4. Istražite o kojim veličinama ovisi period jednostavnog njihala. Možete li napisati algebarski izraz za period?



Napomena: Duljina njihala l sastoji se od duljine konca l_o i polumjera kuglice r koji možete odrediti.

Slika 5.3. Uputa za eksperiment

5.4. Električni otpor

Kada vodič uključimo na izvor napona, njime proteče električna struja, a prolaskom struje kroz vodič javlja se i električni otpor. On nastaje zbog sudara slobodnih elektrona ili nositelja naboja u vodiču s atomima kristalne rešetke pa zbog toga možemo reći da je električni otpor fizička veličina koja karakterizira prolaz električne struje kroz neki vodič.

Fizička oznaka za električni otpor jest R, a mjerna je jedinica Ω.

Električni otpor vodiča jest stalna vrijednost te ga možemo odrediti mjereći električni napon U na krajevima vodiča i električne struje I u tom strujnom krugu.

Primjer 1. Mjerenjem su dobiveni podaci prikazani u tablici 5.13.

U/V	7	10	12	15	16
I/A	0,70	1,00	1,25	1,41	1,65

Tablica 5.13. Vodič 1

Zadatak 1. Vrijednosti električnog napona (U) i električne struje (I) iz tablice 5.13. ucrtajte u grafički prikaz 1. Objasnite kakva je ovisnost između električnog napona i električne struje.

Grafički prikaz 5.2. Prikaz ovisnosti električnog napona o električnoj struji prvog vodiča

Zadatak 2. Tablicu nadopunite još jednim retkom u kojem odredite omjer $\frac{U}{I}$ te izračunajte srednju vrijednost tog omjera.

Zadatak 3. Odredite koeficijent smjera pravca koji ste dobili kao rezultat grafičkog prikaza u zadatku 1.

Primjer 2. U električni strujni krug, za koji su izmjereni podaci dani u tablici 5.14., uključen je vodič nepoznata otpora.

U/V	7	10	12	14	16
I/A	0,51	0,75	0,94	1,10	1,34

Tablica 5.14. Vodič 2

Zadatak 4. Izračunajte električni otpor tog otpornika za svako mjerenje i podatke zapišite u tablicu. Koliko iznosi srednja vrijednost električnog otpora tog otpornika?

Zadatak 5. Vrijednosti električnog napona i električne struje iz tablice 5.14. ucrtajte u grafički prikaz. Usporedite ga s grafičkim prikazom u zadatku 1. Što možete iz toga zaključiti?

Grafički prikaz 5.3. Prikaz ovisnosti električnog napona o električnoj struji drugog vodiča

Električni otpor vodiča R ovisi o izgledu vodiča, tj. o njegovim geometrijskim osobinama: duljini l i površini poprečnog presjeka S, ali ovisi i o vrsti materijala od kojeg je vodič načinjen.

Proučimo sada kako električni otpor ovisi o duljini l, zatim o poprečnom presjeku S za danu vrstu materijala.

Primjer 3. U električni strujni krug spojen je vodič od željeza presjeka $7{,}07 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}^2$. Podaci se nalaze u tablici 5.15.

l/m	U/V	I/A
0,82	0,15	0,12
0,60	0,09	0,11
0,40	0,05	0,085
0,20	0,025	0,08
0,10	0,011	0,07

Tablica 5.15. Izmjerene vrijednosti za željezo

Zadatak 6. Tablicu 5.15. nadopunite stupcem za otpor i izračunajte ga.

Zadatak 7. Nacrtajte grafički prikaz koji pokazuje ovisnost električnog otpora vodiča o njegovoj duljini. Kako izgleda ta ovisnost?

Grafički prikaz 5.4. Ovisnost otpora o duljini vodiča za željezo

Primjer 4. U električni strujni krug spojen je vodič od bakra presjeka $7{,}07 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}^2$ (isti presjek kao vodič od željeza). Podaci se nalaze u tablici 5.16.

l/m	U/V	I/A
0,82	0,02	0,11
0,60	0,015	0,1
0,40	0,008	0,095
0,20	0,004	0,085
0,10	0,0016	0,07

Tablica 5.16. Podaci za bakar

Zadatak 8. Tablicu 5.16. nadopunite stupcem za električni otpor te ga izračunajte.

Zadatak 9. Nacrtajte grafički prikaz koji pokazuje ovisnost električnog otpora vodiča o njegovoj duljini. Kako izgleda ta ovisnost?

Grafički prikaz 5.5. Ovisnost otpora o duljini vodiča za bakar

Primjer 5. U električni strujni krug spojen je vodič od bakra duljine 60 cm. Mijenjana je površina poprečnog presjeka vodiča S. Podaci su u tablici 5.17.

S/m^2	U/V	I/A
1,018*10^{-7}	0,089	0,80
2,036*10^{-7}	0,04	0,80
1,54*10^{-6}	0,008	1,00
7,07*10^{-8}	0,015	0,1

Tablica 5.17. Površina poprečnog presjeka

Zadatak 10. Tablicu 5.17. nadopunite stupcem za električni otpor te ga izračunajte.

Zadatak 11. Nacrtajte graf koji pokazuje ovisnosti električnog otpora vodiča od bakra o površini poprečnog presjeka. Radi li se o linearnoj ovisnosti?

Zadatak 12. Koristeći podatke iz tablice 5.17. napravite tablicu u kojoj će biti ovisnost električnog otpora o $\frac{1}{S}$, nacrtajte sada grafički prikaz $R - S^{-1}$.

Iz svega dosada napravljenoga proizlazi da je: $R = \frac{U}{I}$ i $R = \rho\frac{l}{S}$, gdje je ρ električna otpornost.

Učenici koji bi sami htjeli istražiti Ohmov zakon, mogu to napraviti na stranici http://physics.mef.hr/webpraktikum/strujnikr/Page1.php.

6. VEKTORI U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA

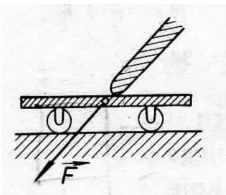
Fizičke veličine dijelimo na skalarne i vektorske veličine. Za skalarne veličine značajno je da su određene svojom vrijednošću i mjernom jedinicom (temperatura, vrijeme, masa…). Fizičke veličine koje nisu u potpunosti određene svojom vrijednošću i mjernom jedinicom, nego je važan i smjer nazivaju se *vektorske veličine* ili *vektori* (brzina, akceleracija, sila…). Vektor grafički predočavamo usmjerenom dužinom.

Operacije s vektorima, a to su zbrajanje, oduzimanje i množenje razlikuju se od operacija sa skalarima, a u matematici su jasno definirana pravila računanja s vektorima.

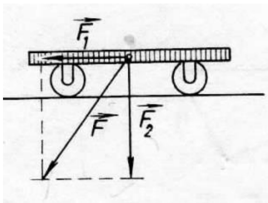
Naš je zadatak da matematička pravila primijenimo na fizičkim veličinama.

6.1. Rastavljanje sile na kosini na njezine komponente

Pri gibanju tijela po nekoj površini često susrećemo situaciju da se tijelo ne može gibati u smjeru sile koja uzrokuje to gibanje.

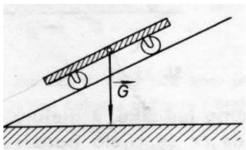


Slika 6.1. Horizontalna podloga

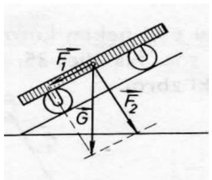


Slika 6.2. Komponente sile

Sila $\vec{F}$, koju vidimo na slici 6.1., uzrokuje gibanje u horizontalnom smjeru po površini podloge, ali ujedno i pritišće kolica na podlogu. Slika 6.2. pokazuje nam da silu $\vec{F}$ možemo rastaviti na komponente u horizontalnom i vertikalnom smjeru. Sile u horizontalnom $\overrightarrow{F_1}$ i vertikalnom smjeru $\overrightarrow{F_2}$ dobit ćemo pomoću vektorskog zbroja, tako da nam sila $\vec{F}$ bude rezultanta.



Slika 6.3. Kosina



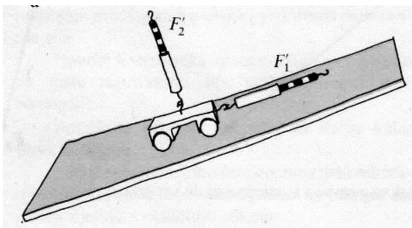
Slika 6.4. Komponente sile na kosini

Kada su kolica na kosini, njih sila teža $\vec{G}$ vuče okomito prema dolje (slika 6.3.). Tu se zbog čvrste podloge kolica mogu gibati samo niz kosinu. Sila teža pritišće kolica i na podlogu. Slika 6.4. pokazuje nam da silu težu na kosini možemo rastaviti na dvije komponente $\overrightarrow{F_1}$, niz kosinu i $\overrightarrow{F_2}$ okomito na kosinu.

Izveli smo pokus kako ga prikazuje slika 6.5. Djelovali smo na kolica silom $\overrightarrow{F_1}$ paralelno s kosinom

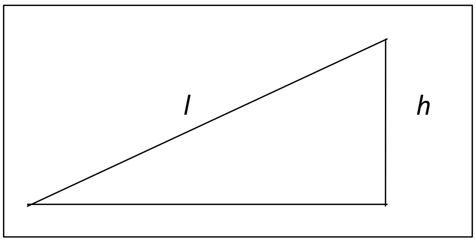
sve dok ih nismo uravnotežili, postigli da je a = 0.

Nakon toga drugim dinamometrom vučemo



Slika 6.5. Mjerenje komponenata sile

kolica okomito prema gore u odnosu na kosinu sve dok ne postignemo da kolica jedva dodiruju podlogu. Dobivene iznose sila $\overrightarrow{F_1}$ i $\overrightarrow{F_2}$ zabilježili smo u tablicu. Ovdje je također važno znati duljinu *l* i visinu *h* kosine.



Slika 6.6. Kosina

Rezultate pokusa možemo vidjeti u tablicama 6.1, 6.2 i 6.3. Svaka tablica odgovara različitim visinama i duljinama kosine.

težina kolica *G* = 7,5 N

duljina kosine *l* = 95 cm

visina kosine *h* = 20 cm

F_1/N	1,6	1,8	1,6	1,8	1,7
F_2/N	7,3	7,4	7,2	7,5	7,1

Tablica 6.1. Prvi nagib kosine

težina kolica *G* = 7,5 N

duljina kosine *l* = 50 cm

visina kosine *h* = 20 cm

F_1/N	2,9	3,2	3,2	3,1	2,8
F_2/N	6,9	7,1	7	7,2	6,8

Tablica 6.2. Drugi nagib kosine

težina kolica *G* = 7,5 N

duljina kosine *l* = 65 cm

visina kosine *h* = 22 cm

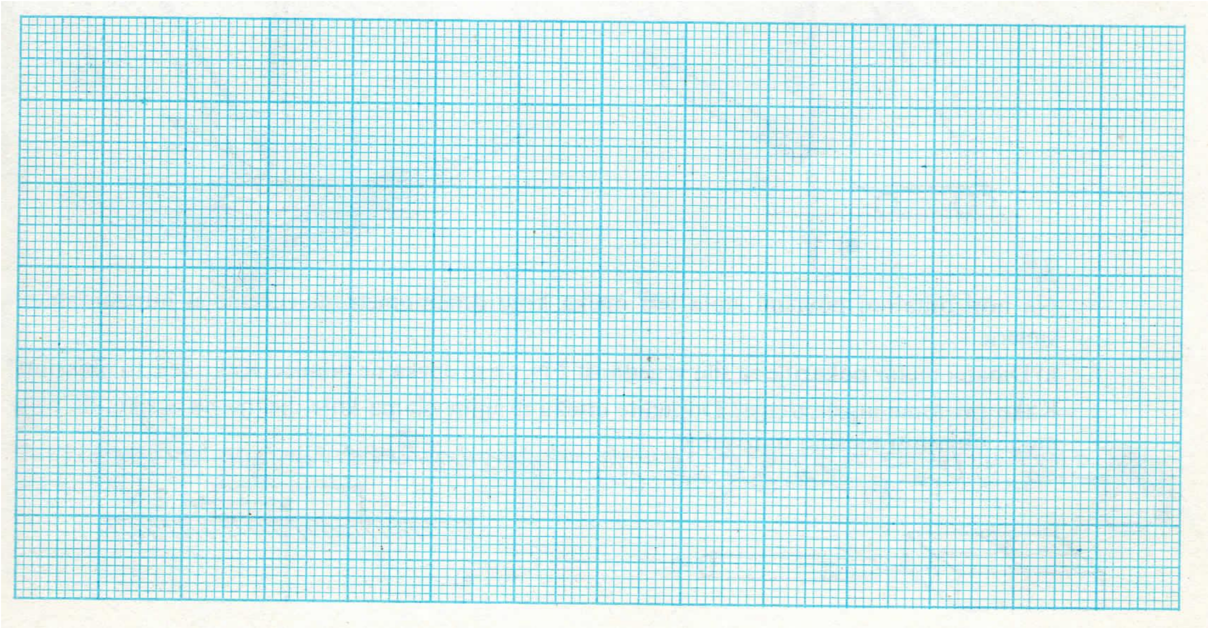
F_1/N	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8
F_2/N	7,1	7,3	7	6,9	7,2

Tablica 6.3. Treći nagib kosine

Zadatak 1. Izračunajte srednju vrijednost sila F_1 i F_2 za svaku tablicu te apsolutnu pogrešku.

Zadatak 2. Nacrtajte kosine u umanjenom mjerilu, s jednakim nagibom kao u tablicama 6.1., 6.2. i 6.3.

Grafički odredite iznose komponente sile teže $\vec{G}$, $|\overrightarrow{F_1}|$ paralelnu s kosinom i $|\overrightarrow{F_2}|$ okomitu na podlogu kosine.



Zadatak 3. Jesu li grafički dobiveni podaci jednaki onima dobivenima pokusom? Zašto?

Zadatak 4. Pokušajte računski odrediti iznose komponente sile teže $\vec{G}$. Koje područje matematike moramo poznavati ako želimo izračunati $|\vec{F_1}|$ i $|\vec{F_2}|$?

6.2. Složena gibanja

Gibanje tijela može biti jednostavno i složeno. Jednostavno gibanje je jednoliko pravocrtno, jednoliko ubrzano i jednoliko usporeno pravocrtno gibanje. Kada tijelo istodobno izvodi dva ili više jednostavnih gibanja, kažemo da je njegovo gibanje složeno.

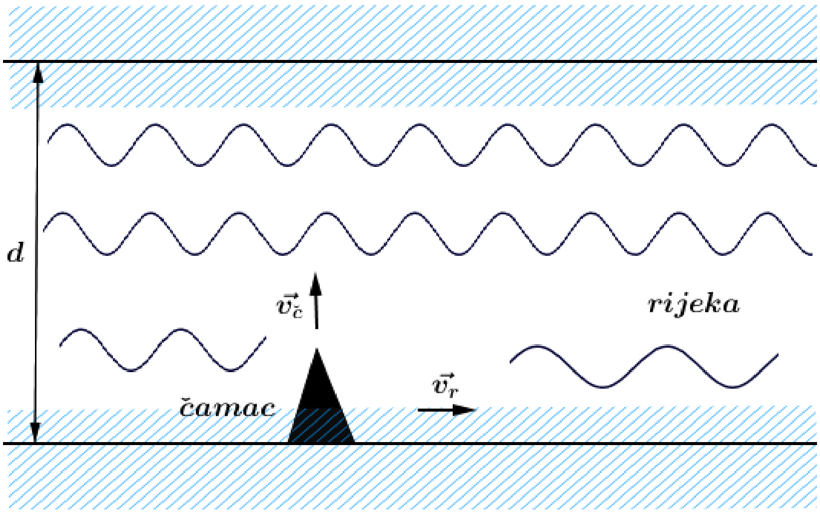
U našoj okolini možemo često uočiti složena gibanja, npr. ako se nalazimo na pokretnim stepenicama koje imaju svoju brzinu gibanja v_1 te mi još počnemo hodati (gibati se) po njima brzinom v_2, naše gibanje će biti složeno jer se sastoji od dva jednostavna pravocrtna gibanja koja se događaju istodobno i koja su međusobno neovisna.

Kod složenih gibanja važnu ulogu imaju smjerovi brzina kojima se tijela gibaju pa nam ovdje vektori uvelike pomažu u razumijevanju ovakvih gibanja.

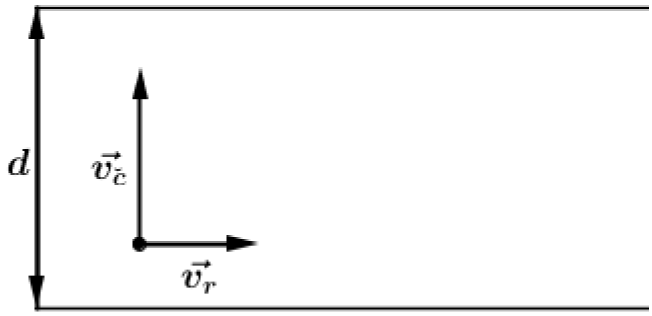
Promotriti ćemo dva primjera: čamac na vodi i horizontalni hitac.

ČAMAC NA VODI

Čamac plovi okomito na tok rijeke s jedne obale na drugu. Neka je širina rijeke na tom mjestu *d,* Slika 1. Kako će se gibati čamac? Hoće li stići na drugu obalu točno nasuprot mjestu s kojeg je krenuo?

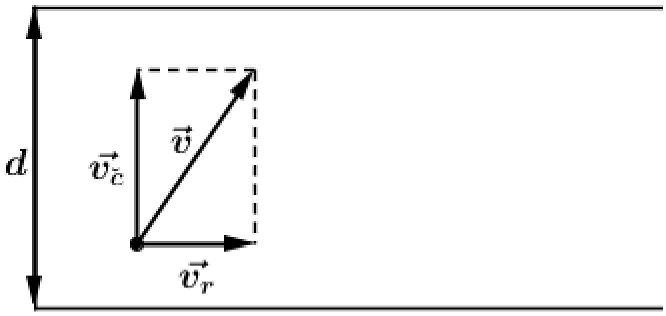


Slika 6.7. Čamac na vodi



Slika 6.8. Brzine rijeke i čamca

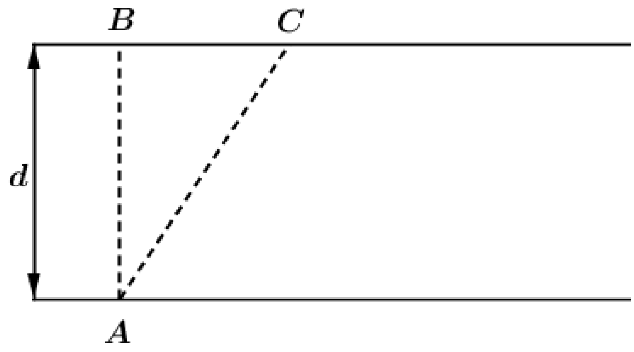
Brzina rijeke i brzina čamca jesu vektorske veličine pa je stvarna (ukupna) brzina čamca jednaka njihovom vektorskom zbroju: $\vec{v} = \overrightarrow{v_č} + \overrightarrow{v_r}$, slika 6.9.



Slika 6.9. Ukupna brzina

U ovom su slučaju brzine čamca i rijeke međusobno okomite te možemo primjenom Pitagorina poučka izračunati $v = \sqrt{v_č^2 + v_r^2}$.

Neće stići na drugu obalu na mjesto točno nasuprot, rijeka će ga „odvući“ u svom smjeru (slika 6.10.). Zadavanjem točnih iznosa brzina rijeke i čamca te širine rijeke možemo izračunavati brzinu te vrijeme i udaljenosti mjesta gdje bi stigao čamac da je u mirnoj vodi (nasuprot mjesta polaska i mjesta stvarnog pristajanja čamca).



Slika 6.10. Putanja čamca

Zbog jednolikosti i neovisnosti gibanja možemo izračunati vrijeme koje je potrebno da čamac stigne na drugu obalu: $t = \frac{d}{v_č}$, a to je i ukupno vrijeme prelaska čamca na drugu stranu pa poznavajući brzinu rijeke izračunamo udaljenost točaka B i C: $x = |BC| = v_r \cdot t$.

Stvarni put čamca $|AC|$, možemo ga označiti *s,* računajući na dva načina dolazimo do istoga rezultata. Dakle ili $s = \frac{v}{t}$ ili $s = \sqrt{d^2 + |BC|^2}$.

Zadatak 1. Rijeka je široka 85 metara, a brzina njezina toka iznosi 5 ms^{-1}. Skiper je svoj čamac usmjerio okomito na obalu te se kreće brzinom 8 ms^{-1}. Koliko će mu vremena trebati da pređe na suprotnu stranu rijeke, kolika će biti njegova stvarna brzina, koliki će put prijeći i koliko će daleko otići od mjesta na koje bi stigao da se nalazi na jezeru? Zadatak riješiti grafički i računski.

Zadatak 2. Kako promjena brzine toka rijeke utječe na gibanje tijela, na brzinu i prijeđeni put?

Zadatak 3. Ima li brzina čamca utjecaja na ukupni prevaljeni put čamca i na vrijeme prelaska na drugu stranu?

Zadatak 4. Kako odrediti brzinu s obzirom na obalu *v* ako brzina rijeke v_r i $v_č$ brzina čamca nisu međusobno okomite?

HORIZONTALNI HITAC

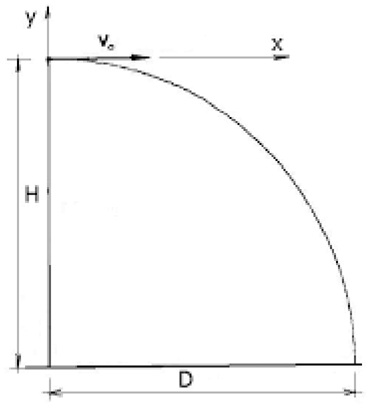
Horizontalni hitac predstavlja primjer još jednog složenog gibanja. On je sastavljen od jednolikog pravocrtnog gibanja u horizontalnom smjeru s neke visine i jednolikog ubrzanog gibanja (slobodnog pada) u vertikalnom smjeru (slika 6.11.). Putanja tijela u horizontalnom hicu jest parabola jer je sastavljena od dva gibanja koja su međusobno okomita. Vrijeme trajanja horizontalnog hica isto je kao i vrijeme koliko traje slobodni pad s jednake visine

$$t_p = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

H – visina s koje je izbačeno tijelo u horizontalnom smjeru početnom brzinom v_0

D – najveća horizontalna udaljenost koju prevaljuje tijelo prije udara o tlo

$$D = v_0\, t_p$$

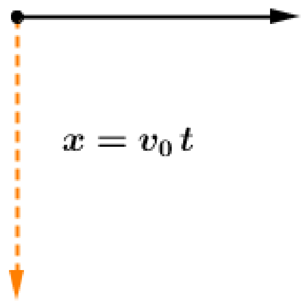


Slika 6.11. Horizontalni hitac

Vrijedi **načelo neovisnosti gibanja**: jednostavna gibanja na koja se mogu rastaviti složena gibanja ne utječu jedno na drugo (neovisna su) i događaju se istovremeno.

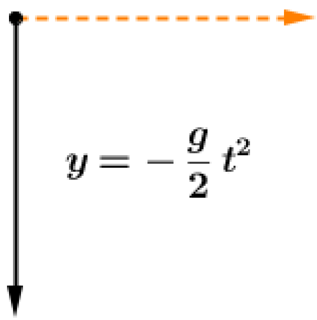
Ako postavimo ishodište koordinatnog sustava u početni položaj tijela, onda nam je zbog načela neovisnosti gibanja moguće odrediti njegov trenutni položaj i to:

- na x-osi prema zakonu: $x(t) = v_0\, t$ jer je tijelo koje je dobilo početnu brzinu u horizontalnom (vodoravnom) smjeru te se u tom smjeru giba jednoliko po pravcu, slika 6.12.



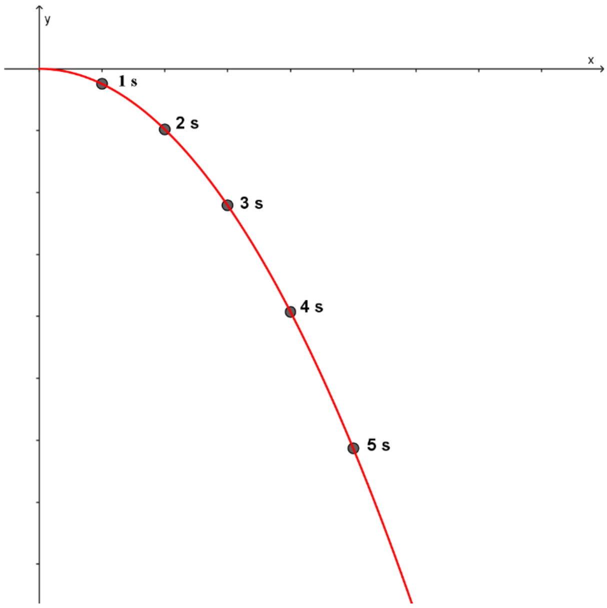
Slika 6.12. Gibanje tijela u horizontalnom smjeru

- na y-osi prema zakonu: $y(t) = -\frac{g}{2}t^2$, to je put koji bi tijelo prešlo slobodno padajući, slika 6.13.



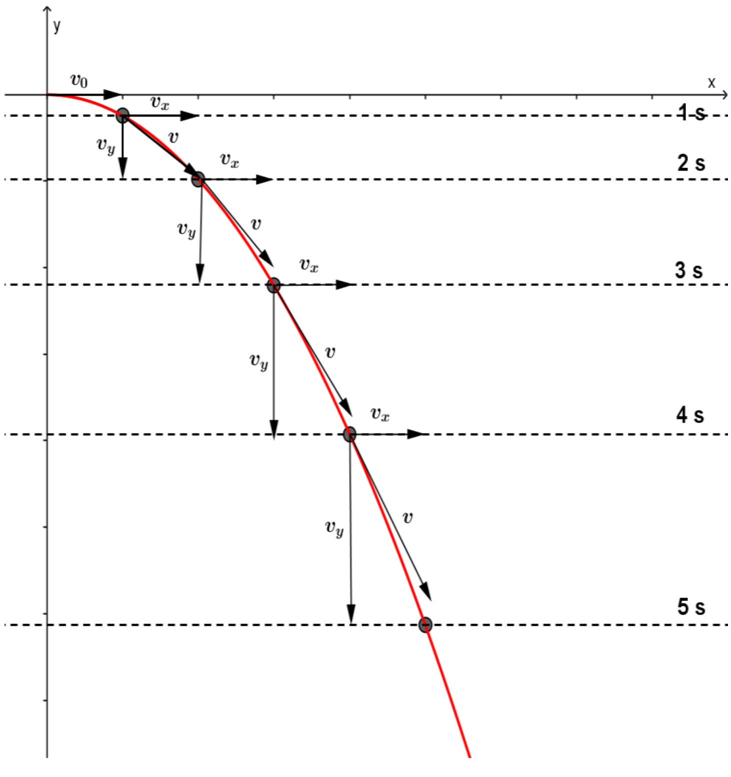
Slika 6.13. Gibanje tijela u vertikalnom smjeru

Možemo ucrtavajući položaj tijela u svakom trenutku kao točku u koordinatnom sustavu dobiti putanju tijela, slika 6.14.



Slika 6.14. Putanja tijela u horizontalnom hicu

Brzina tijela u horizontalnom se smjeru ne mijenja: $v_x = v_0$, a u vertikalnom smjeru izračunavamo je prema zakonu: $v_y = g\,t$ pa tako iznos trenutačne brzine dobijemo vektorskim zbrajanjem brzina v_x i v_y, $\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y}$ ili $v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$, slika 6.15.



Slika 6.15. Brzina tijela u horizontalnom hicu

Primjer 1: Kuglica leti sa stola visokog 125 cm. Pala je na pod 250 cm daleko od ruba stola.

a) Kolika je bila njezina brzina u trenutku napuštanja stola?

b) Nacrtaj putanju čestice prikazujući njezin položaj za svaku desetinku sekunde.

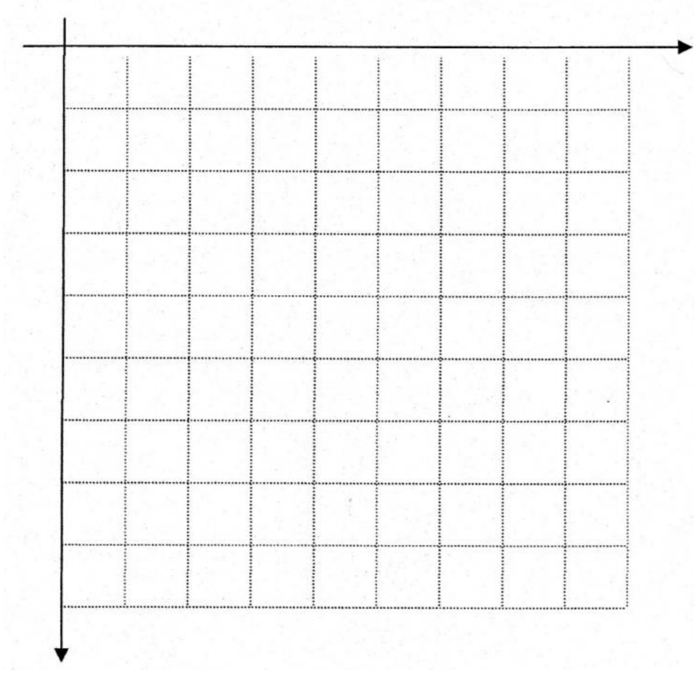
c) Ucrtaj njezine brzine v_x i v_y, ukupnu brzinu također za svaku desetinku sekunde.

Rješenje:

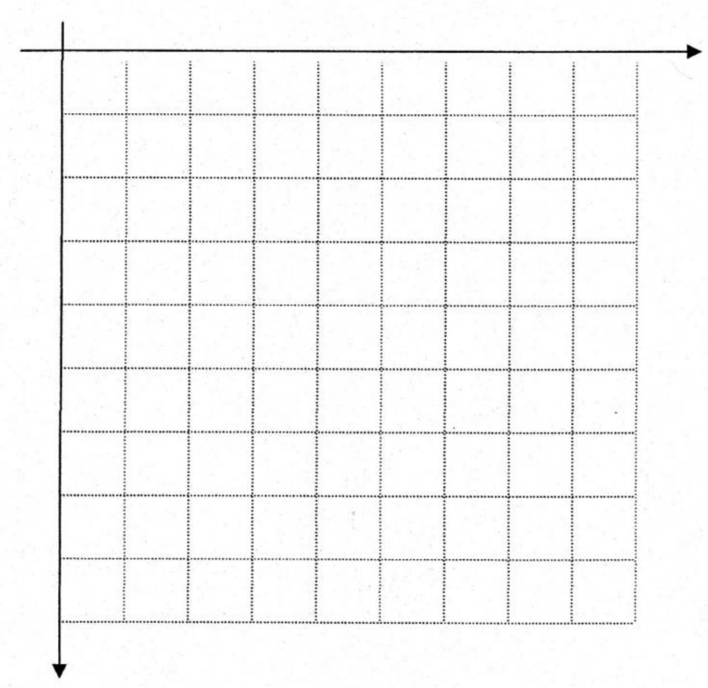
a) Visina stola iznosi $H = 125 \text{ cm} = 1{,}25 \text{ m}$; domet je $D = 250 \text{ cm} = 2{,}5 \text{ m}$

iz formule $t_p = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ odredimo vrijeme pada $t_p = 0{,}5$ s, a onda dobivamo $v_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$.

b) Položaj tijela izračunavamo za svaku desetinku sekunde te ucrtavamo u koordinatni sustav koji izgleda kao slika 6.14.



c) Sada na ucrtani položaj i putanju ucrtavamo vektore brzine, kao slika 6.15.



7. LINEARNA FUNKCIJA U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA U GEOGEBRI

7.1. Istraživanja gibanja pod utjecajem stalne sile – GeoGebra

Primjere gibanja koje smo analizirali u prvom dijelu ove vježbe, sada analiziramo u programu GeoGebra.

Primjer 1. Analiziranjem tragova tipkala na traci prijeđeni put kolica za određeno vrijeme prikazan je u tablici 7.1.

t/s	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
s/cm	0	0,6	1,8	3,5	5,8	8,6	12	16	20,5	25,6	31,3	37,6	44,5	52

Tablica 7.1. Put kolica

Zadatak 1. Nacrtajte s-t grafički prikaz ovoga gibanja.

Zadatak 2. Nacrtajte grafički prikaz brzina – vrijeme tog gibanja.

Uputa: Već napravljenu tablicu nadopunite retkom: $v/(\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1})$, a dalje napravite zadatak isto kao zadatak 1.

Zadatak 3. Nacrtajte grafički prikaz akceleracija – vrijeme toga gibanja.

Uputa: Napravljenu tablicu sada nadopunite još retkom $a/(\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-2})$, a nakon toga sve kao i dosada.

Zadatak 4. Napravite aplet s akceleracijom kao promjenjivom veličinom te proučavajte kako će izgledati *s-t* i *v-t* grafički prikazi u ovisnosti o promjeni vrijednosti akceleracije.

Primjer 2. Analiziranjem tragova tipkala na traci prijeđeni put kolica za određeno vrijeme prikazan je u tablici 7.2.

t/s	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
s/cm	0	2,2	4,6	7,2	10	13	16,2	19,6	23,3	27,1	31,1

Tablica 7.2. Put kolica

Zadatak 5. Nacrtajte *s-t* grafički prikaz ovoga gibanja.

Zadatak 6. Nacrtajte grafički prikaz brzina – vrijeme tog gibanja.

Tijelo u ovom slučaju ima početnu brzinu v_0, što se dobro vidi jer *v-t* grafički prikaz ne kreće iz ishodišta.

Zadatak 7. Prepoznajte ovisnost prikazanih veličina.

Zadatak 8. Nacrtajte grafički prikaz akceleracija – vrijeme toga gibanja.

Zadatak 9. Napravite aplet s promjenjivim veličinama: početna brzina i akceleracija te proučavajte izgled *s-t* i *v-t* grafičkih prikaza.

7.2. Elastična sila i određivanje konstante elastičnosti opruge – GeoGebra

Zadatak 1. Napravite grafički prikaz sila – produljenje na temelju podataka iz tablice 7.3.

F/N	$\Delta l/\mathrm{cm}$
0	0
0,5	2,04
1	4,08
1,5	6
2	8,22
2,5	10,01

Tablica 7.3. Srednje produljenje

Zadatak 2. Kakva je ovisnost sile o produljenju opruge?

Možete li iz grafičkog prikaza odrediti kolika sila uzrokuje produljenje od 15 cm i koliko će biti produljenje ako je uzrokovano silom od 4 N?

Zadatak 3. Odredite konstantu elastičnosti opruge pomoću grafičkog prikaza u GeoGebri.

Uputa: Koeficijent smjera ili nagib pravca mogu odrediti uzimajući koordinate dvije točke na $\mathrm{F} - \Delta l$ grafu i $nagib = \frac{F_2 - F_1}{\Delta l_2 - \Delta l_1}$, gdje prva odabrana točka ima koordinate $(F_1, \Delta l_1)$, a druga $(F_2, \Delta l_2)$.

Zadatak 4. Napravite grafički prikaz sila – produljenje koristeći se podacima koji se nalaze u tablici 7.3.

Zadatak 5. Odredite koeficijent elastičnosti opruge pomoću grafičkog prikaza u zadatku 4.

Zadatak 6. Usporedite izgled grafa iz zadatka 1. i zadatka 4. Što možemo zaključiti iz tih grafova?

Zadatak 7. Napravite aplet sa silom kao promjenjivom veličinom te proučavajte kako će izgledati $\mathrm{k} - \Delta l$ grafički prikaz.

7.3. Period jednostavnog njihala – GeoGebra

Zadatak 1. Istražite kako period T ovisi o amplitudi, odnosno o kutu θ za danu masu njihala. Ovisnost $T - \theta$ prikažite grafički na temelju podataka iz tablice 7.4.

$\theta/°$	T/s
50	1,492
40	1,518
30	1,506
45	1,528
20	1,504
10	1,508

Tablica 7.4. Ovisnost perioda u kutu otklona

Zadatak 2. Kako period T ovisi o masi m njihala za danu duljinu l? Prikažite tu ovisnost grafički.

m/g	T/s
40	1,518
65	1,528
90	1,522
115	1,506
140	1,538
100	1,526

Tablica 7.5. Ovisnost perioda o masi

Zadatak 3. Istražite kako period T ovisi o duljini njihala l za danu masu njihala. Nacrtajte ovisnost $T - l$, a zatim i ovisnost $T^2 - l$ i ovisnost $T - \sqrt{l}$ u GeoGebri upotrebom podataka iz tablice 7.6.

l/cm	T/s	T^2/s^2
54	1,476	2,179
44	1,326	1,758
34	1,16	1,346
24	0,976	0,953
65	1,62	2,624
80	1,8	3,24

Tablica 7.6. Ovisnost perioda o duljini niti

Zadatak 4. Napravite aplet s duljinom niti kao promjenjivom veličinom i promatrajte što se događa s periodom ili kvadratom perioda.

7.4. Električni otpor – GeoGebra

Zadatak 1. Koristeći vrijednosti električnog napona (*U*) i električne struje (*I*) iz tablice 7.7. nacrtajte u GeoGebri grafički prikaz. Objasnite kakva je ovisnost između električnog napona i električne struje.

U/V	7	10	12	15	16
I/A	0,70	1,00	1,25	1,41	1,65

Tablica 7.7. Vodič 1

Zadatak 2. U električni strujni krug, za koji su izmjereni podaci dani u tablici 7.8., uključen je vodič nepoznata otpora. Prikažite pomoću GeoGebre ovisnost električnog napona o električnoj struji, odredite na osnovi toga prikaza koliki je nepoznati električni otpor.

U/V	7	10	12	14	16
I/A	0,51	0,75	0,94	1,1	1,34

Tablica 7.8. Vodič 2

Zadatak 3. Napravite aplet u kojem je otpor promjenjiva veličinate proučavajte što se događa s ostalim veličinama, U i I.

Zadatak 4. Nacrtajte grafički prikaz koji pokazuje ovisnost električnog otpora vodiča o njegovoj duljini koristeći se podacima u tablici 7.9. Kako izgleda ta ovisnost?

l/m	R/Ω
0,82	1,25
0,60	0,82
0,40	0,59
0,20	0,31
0,10	0,157

Tablica 7.9. Ovisnost električnog otpora o duljini vodiča za željezo

Zadatak 5. Nacrtajte uz pomoć GeoGebre grafički prikaz koji pokazuje ovisnost električnog otpora vodiča od bakra o njegovoj duljini; podaci su u tablici 7.10. Usporedite ovaj grafički prikaz s prethodnim, vodič od željeza i bakra istog su poprečnog presjeka.

l/cm	82	60	40	20	10
R/Ω	0,18	0,15	0,084	0,047	0,023

Tablica 7.10. Ovisnost električnog otpora o duljini vodiča za bakar

Zadatak 6. Nacrtajte u GeoGebri grafički prikaz koji pokazuje ovisnosti električnog otpora vodiča od bakra o površini poprečnog presjeka s podacima iz tablice 7.10. Kakva je ovisnost između veličina? Koja tablica a) ili b) daje linearnu ovisnost?

a)

S/m^2	R/Ω
1,018*10^{-7}	0,11
2,036*10^{-7}	0,05
1,54*10^{-6}	0,008
7,07*10^{-8}	0,15

b)

R/Ω	0,008	0,05	0,11	0,15
$\frac{1}{S}$ / m^{-2}	0,65*10^6	4,9*10^6	9,8*10^6	14,14*10^6

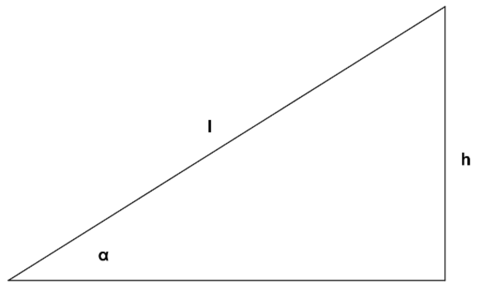
Tablica 7.11. Ovisnost električnog otpora o površini poprečnog presjeka

Zadatak 7. Napravite aplet u kojem mijenjanjem vrijednosti električnog otpora proučavamo kolika mora biti duljina i površina poprečnog presjeka vodiča.

8. VEKTORI U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA U GEOGEBRI

8.1. Rastavljanje sile na kosini na njezine komponente – GeoGebra

Zadatak 1: Nacrtajte u umanjenom mjerilu u GeoGebri kosinu duljine 95 cm, a visine 20 cm.



Slika 8.1. Kosina

Zadatak 2: Na kosini iz zadatka 1. stoji tijelo težine *G* = 7,5 N. Grafički rastavite težine toga tijela na njezine komponente $|\overrightarrow{F_1}|$ paralelnu s kosinom i $|\overrightarrow{F_2}|$ okomitu na podlogu kosine. Očitajte njihove iznose.

Zadatak 3. Napravite aplet u kojem su promjenjive veličine duljina i visina kosine te promatrajte kako se mijenjaju iznosi komponenti sile teže, $|\overrightarrow{F_1}|$ paralelne s kosinom i $|\overrightarrow{F_2}|$ okomite na podlogu kosine.

Zadatak 4. Napravite aplet tako da tijelo postavite na vrh kosine. Ono će se gibati ubrzanjem $a = g\sin\alpha$ ako nema sile trenja, zbog utjecaja komponente sile teže $|\overrightarrow{F_1}|$, paralelne s kosinom. Napravite animaciju gibanja tijela.

Za one koji žele više:

Zadatak 5. Napravite aplet kao u zadatku 4. tako da možete mijenjati iznos koeficijenta trenja od 0 do 1 te animirajte takvo gibanje.

Sila trenja je suprotne orijentacije od komponente sile teže, $|\overrightarrow{F_1}|$ paralelne s kosinom. Izračunava se prema izrazu:

$F_{tr} = \mu\,|\overrightarrow{F_2}| = \mu\, m\, g \cos\alpha$, μ je koeficijent trenja.

8.2. Složena gibanja – GeoGebra

Zadatak 1. Rijeka je široka 85 metara, a brzina njezina toka 5 m s^{-1}. Skiper je svoj čamac usmjerio okomito na obalu te se kreće brzinom 8 m s^{-1}. Kolika će biti njegova stvarna brzina i koje orijentacije u odnosu na tok rijeke? Nacrtajte vektore brzina u GeoGebri s njihovim smjerovima, orijentacijama i iznosima.

Zadatak 2. Napravite aplet tako da promjenjive veličine budu brzina čamca i brzina rijeke s obzirom na iznos.

a) Kako iznos brzine toka rijeke utječe na promjenu ukupne brzine gibanja čamca?

b) Kako iznos brzine čamca utječe na ukupnu brzinu?

Zadatak 3. Napravite aplet tako da brzina toka rijeke i brzina čamca ne budu međusobno okomite.

a) Kako međusobni smjer brzina utječe na ukupnu brzinu?

b) Kada je najveća, a kada najmanja brzina kretanja broda?

Zadatak 4. Avion je krenuo iz Osijeka prema istoku brzinom 600 km h^{-1}, a zatim je skrenuo nakon 2 sata na sjever i kretao se brzinom 800 km h^{-1} još 3 sata.

a) Nacrtajte brzine njegova gibanja u GeoGebri.

b) Kolika mu ukupna brzina gibanja?

c) Koliko je skrenuo od prvobitnog smjera gibanja (istoka)?

d) Kolika je udaljenost od početnog mjesta gibanja?

HORIZONTALNI HITAC

Zadatak 5. Tijelo je izbačeno s visine od 45 m s početnom brzinom 2 m s^{-1} u horizontalnom smjeru. Nacrtajte u GeoGebri putanju tijela s položajem tijela za svaku sekundu gibanja.

Zadatak 6. Napravite aplet tako da mijenjate početnu brzinu te promatrajte na koji se način giba tijelo (koliko daleko pada od podnožja, koliko dugo leti).

Zadatak 7. Napravite aplet tako da mijenjate visinu s koje je tijelo izbačeno te ponovno promotrite što će se dogoditi s gibanjem tijela.

Zadatak 8. Na putanju tijela dodajte vektore brzina u horizontalnom i vertikalnom smjeru za svaku sekundu gibanja te nađite ukupnu brzinu za svaki položaj.

Za one koji žele više:

Nacrtajte putanju tijela u GeoGebri i vektore brzina za kosi hitac koji se ispaljuje s neke visine; dakle tijelo ima početnu brzinu, ali sada ne u horizontalnom smjeru, nego pod nekim kutom u odnosu na horizontalu.

Kosi hitac možete pogledati na stranicama:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/projectile-motion

http://www.walter-fendt.de/ph6en/projectile_en.htm

LITERATURA

[1] Andreis, T., Plavčić, M., Simić, N. Fizika 1, udžbenik za 1. razred gimnazije i srodnih škola s četverogodišnjim programom, 2. izdanje, Zagreb, Profil, 2002.

[2] Andreis, T., Plavčić, M., Simić, N. Fizika 2, udžbenik za 2. razred gimnazije i srodnih škola s četverogodišnjim programom, Zagreb, 2. izdanje, Zagreb, Profil, 2002.

[3] Antončić, N., Špalj, E., Antoliš, S., Volenec, V., Matematika 3, udžbenik sa zbirkom zadataka za 3. razred opće, jezične i klasične gimnazije, drugi dio, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[4] Brković, N. Zbirka zadataka iz fizike, Zagreb, LUK d.o.o., 2001.

[5] Čavlović, I., Lapaine, M., Matematika 3, udžbenik za 3. razred četverogodišnje strukovne škole, drugi dio, Školska knjiga, Zagreb, 2005.

[6] Dakić, B., Nagib pravca, MiŠ, Zagreb, 2000. (5. 12. 2015.)

[7] Dakić, B., Elezović, N., Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola, 1. dio, Element, Zagreb, 2014.

[8] Dakić, B., Elezović, N., Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola, 2. dio, Element, Zagreb, 2014.

[9] Dakić, B., Elezović, N., Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazija i tehničkih škola, 2. dio, Element, Zagreb, 2014.

[10] Gusić, I., Krajina, J., Matematika 1, udžbenik za četverogodišnje strukovne škole, drugi dio, Školska knjiga, Zagreb, 2005.

[11] Horvat, D., Hrupec, D. Fizika 1, Pojmovi i koncepti: udžbenik s multimedijskim sadržajem za 1. razred gimnazija, Zagreb, Neodidacta d.o.o., 2010.

[12] Horvat, D., Hrupec, D. Fizika 2, Pojmovi i koncepti: udžbenik s multimedijskim sadržajem za 2. razred gimnazija, Zagreb, Neodidacta

[13] Horvat, D., Hrupec, D. Fizika 3, Pojmovi i koncepti: udžbenik s multimedijskim sadržajem za 3. razred gimnazija, Zagreb, Neodidacta

[14] Krsnik, R., Mikuličić, B. Fizika 3: međudjelovanja, relativnost, titranja i zvuk, Zagreb, Školska knjiga, 1995.

[15] Labor, J. Fizika 1, udžbenik za 1. razred gimnazije, Zagreb, Alfa, 2014.

[16] Labor, J. Fizika 2, udžbenik za 2. razred gimnazije, Zagreb, Alfa, 2014.

[17] Labor, J. Fizika 3, udžbenik za 3. razred gimnazije, Zagreb, Alfa, 2014.

[18] Mikuličić, B. Fizika Gibanje i energija, Svezak B, radni udžbenik fizike za srednje usmjereno obrazovanje, 3. izdanje, Zagreb, Školska knjiga, 1987.

[19] Paar, V. Fizika 1, udžbenik za 1. razred gimnazije, 13. izdanje, Zagreb, Školska knjiga, 2006.

[20] Paar, V.,Šips, V. Fizika 2, udžbenik za 2. razred gimnazija, Zagreb, Školska knjiga, 2007.

[21] Šikić, Z., Bujan – Slamić, I., Crnković, M., Germin Mileta, R., Jeličić, Lj., Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za 3. razred gimnazije i tehničke škole, drugi dio, Profil, Zagreb, 2014.

[22] Šikić, Z., Kalezić, R., Lukač, S., Palanović, B., Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za prvi razred gimnazije i tehničke škole, drugi dio, Profil, Zagreb, 2014.

[23] Vernić, E., Mikuličić, B. Vježbe iz fizike, priručnik za laboratorijski rad učenika srednjih škola, 4. izdanje, Zagreb, Školska knjiga, 1984.

[24] Vernić, E., Liščić, B., Šindler, G., Fizika 1 Mehanika i toplina, 9. izdanje, Školska knjiga, 1981.

[25] URL: www.geogebra.org, lipanj – rujan 2016.

[26] URL: http://www.walter-fendt.de/ph6en/projectile_en.htm, kolovoz 2016.

[27] URL: https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/projectile-motion, rujan 2016.

[28] URL: http://physics.mef.hr/webpraktikum/strujnikr/Page1.php, rujan 2016.